TEMA 1

cls a VII-a 21.02.2015

PROBLEME DE CONCURENȚA ȘI COLINIARITATE

Carmen Alina Bileca

n.1 Noțiuni teoretice:

n.1.1 Def: *Trei sau mai multe puncte sunt <u>coliniare</u> dacă există o dreaptă care să conțină acele puncte.*

n.1.2 Def: *Două sau mai multe drepte sunt <u>concurente</u> dacă au un singur punct comun.*

Între problemele de concurență și cele de coliniaritate există o strânsă legătură evidențiată de următoarea lemă:

n.1.3 Lemă: *a, b și c sunt concurente în I dacă și numai dacă punctul de concurență a dreptelor a și b este coliniar cu două puncte ale dreptei c.*

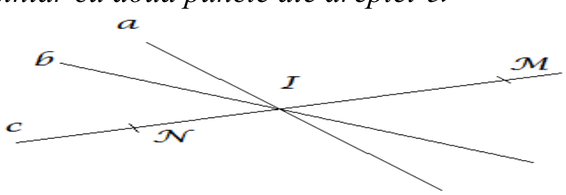

Figura nr.1

$a \cap b \cap c=\{I\} \Leftrightarrow a \cap b=\{I\}$, $M, N \in c$, M-I-N coliniare .

n.1.4 Metode și teoreme folosite în demonstrarea coliniarității

n.1.4.1Coliniaritate demonstrată cu axioma paralelelor(Euclid)

Dacă $AB \parallel d$ *și* $AC \parallel d \Rightarrow A$-$B$-$C$ coliniare

n.1.4.1.a Problemă

Se consideră triunghiul dreptunghic ABCcu m($\hat{BAC}$ *)=90° și înălțime AD,(D∈BC). Notăm cu S intersecția dintre bisectoarele unghiurilor CAD și ABC, iar cu Tintersecția bisectoarelor unghiurilor BAD și ACB. Dacă M, N sunt mijloacele laturilor AC, respectiv AB, arătați că punctele M, S, Tși N sunt coliniare.(E:14504 GM 11/2013)*

n.1.4.2 1Coliniaritate demonstrată cu metoda unghiurilor suplementare

Dacă $B\hat{A}C + C\hat{A}D = 180^0$, *unde* B, D *sunt de o parte și alta a lui* $AC \Rightarrow B - A - D$ *coliniare.*

n.1.4.2.a Problemă

Se dă triunghiul dreptunghicABC, $m(\hat{BAC})$=90°. Fie punctul $M \in (BC)$ și P, *respectiv* Q *simetricele punctului* M *față de* AB, *respectiv* AC.

a)Arătați că punctele P, A, Q *sunt coliniare.*

b)Dacă $AM \perp BC$ *și* $m(\hat{ACB})=15^0$*, aflați perimetrul triunghiului* MPQ *în funcție de lungimile laturilor triunghiului dreptunghic* ABC. *(S:E14.21 GM 1/2014)*

n.1.4.3 Coliniaritate demonstrată cu metoda unghiurilor congruente

Dacă $B\hat{A}D \equiv B\hat{A}C$ *, unde* D, C *de aceeași parte a lui* $AB \Rightarrow A - D - C$ *coliniare*

n.1.4.3. a Problemă

Fie E interior pătratului ABCD și F exterior astfel încît ΔABE și ΔBCF să fie echilaterale. Arătați că D, E, F sunt coliniare.

n.1.4.4 Coliniaritate demonstrată cu teorema reciprocă a unghiurilor opuse la varf.

Dacă $A\hat{B}C = D\hat{B}E$, $A - B - D$ *coliniare și C, E de o parte și alta a lui* $AD \Rightarrow C - B - E$ *coliniare.*

n.1.4.4.a Problemă

Fie ABCD un paralelogram și punctele $M \in (AB)$ și $N \in (CD)$ *astfel încât AM=CN. Dacă O este mijlocul diagonalei [BD], atunci punctele* $M - O - N$ *sunt coliniare .*

n.1. 4. 5 Identificarea dreptei ce conține punctele A, B, C

n.1.4.5.a Problemă

Fie un ΔABC și punctele D, E, F, G picioarele pendicularelor din A pe bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor $A\hat{B}C$ *și* $A\hat{C}B$*. Arătați că D, E, F, G sunt coliniare.*

n.1.4.6 Coliniaritate demonstrată cu teorema cu teorema reciprocă a lui Menelaus

Fie M, N, P puncte distincte de vârfurile situate pe dreptele suport ale laturilor BC, CA, AB ale ΔABC. Dacă are loc relația $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$*, atunci punctele* $M - N - P$ *sunt coliniare.*

n.1.4.6.a Problemă

În paralelogramul ABCD, M este mijlocul laturii DC, $BM \cap AD = \{N\}$, $CN \cap AB = \{P\}$, $BM \cap AC = \{T\}$. *Demonstrați că:*

a)BDNC și BDCP sunt paralelograme.

b)punctele D, T, P sunt coliniare.(E: 14522GM 1/2014)

n.1.4.7 Redifinirea unui punct ce funcționează în condiții de coliniaritate.

n.1.4.7. a Problemă

Fie P un punct în interiorul unui triunghi ΔABC. Construim prin P o paralelă la BC care intersecteazălaturile (AB) și (AC) în M, respective N. Prin M și N ducem paralele la AP ce intersectează (BC) în E și respective F. Arătați că dacă BE+ CF reprezintă o treime din BC, atunci dreapta MN trece prin centrul de greutate al ΔABC.

n.2 Probleme propuse ca temă

n.2.1 Problemă

Fie paralelogramul ABCD, M un punct pe (BD) și $MN \parallel AB$, $N \in (AD)$ $MP \parallel AD$, $P \in (AB)$. *Arătați că dacă* $A_{APMN} = A_{DNM} + A_{BPM}$, *atunci A-M-C sunt coliniare.(E:14290 GM 6-7-8/ 2012)*

n.2.2 Problemă

Fie ABCD paralelogram și punctele E,F astfel încît A-B-E coliniare, [BE]≡[AD], A-D-F coliniare, [DF]≡[AB]. Demonstrați E-C-F coliniare

n.2.3 Problemă

Se consideră triunghiulΔABC, în care D este mijlocul segmentului [BC]. Dacă E este mijlocul segmentului [AD], F mijlocul segmentului [BE], iar G este punctul de intersecție a dreptelor AB și CF, calculați $\frac{AG}{AB.}$ *(E:14586/ GM 6-7-8/2014)*

n.2.4. Problemă

Fie triunghiul ΔABC și punctele D,E, astfel încît $D \in AB$, $E \in AC$ și $\frac{AD}{BD} = \frac{CE}{AE}$. *Paralela prin E la BC intersectează AB în F. Demonstrați că:*

a) Segmentele (AB) și (DF) au același mijloc.
b) Mijloacele segmentelor (AB), (AC),(DE)sunt coliniare

n.2.5 Problemă

Fie P mijlocul medianei [AM] a triunghiului ΔABC. Fie $Q \in (AC)$ *astfel încît* $AQ = \frac{AC}{3}$.

Demonstrați că punctele B-P-Q sunt coliniare.

n.2.6 Problemă

Demonstrați că mijloacele laturilor AB, BC, ale triunghiuluiΔABC și proiecția lui B pe bisectoarea AD a unghiului $B\hat{A}C$ *sunt coliniare.*

n.2.7 Problemă

Fie ABCD un pătrat și $M \in (AB), N \in (BC)$ *astfel încât AM=BN. Dacă {O}=AC∩BD, {T}=AN∩DM și {S}=AD∩CM, demonstrați că punctele O, T, S sunt coliniare. (Titu Zvonaru, Nela Ciceu)*

n.2.8 Problemă

Fie ABCD un trapez, $AB \parallel CD$ *și AC∩BD={O}. Știind că (OM și (ON sunt bisectoarele interioare ale unghiurilor* $A\hat{O}D$ *respectiv* $B\hat{O}C$, $M \in AD, N \in BC$, *demonstrați că:*

a)M-O-N sunt coliniare

b) $MN \parallel AB$ *dacă și numai dacă ABCD este trapez isoscel.*

Bibliografie

[1] *Artur Bălăucă*-Olimpiade, Concursuri, Centre de Excelență,cls a VII-a, ed. Taida, Iași, **ISBN 978-973-7669-44-5**

[2] *Dan Brânzei, Eugen Onofraș,Sebastian Anița,Gheorghe Isvoranu*-Bazele raționamentului geometric-ed. Academia RSR, București 1983**, R.79717**

[3]*Liviu Nicolescu, Vladimir Boskoff*-Probleme practice de geometrie, ed. tehnică, București 1990,**ISBN 973-31-0-165-6**

[4]*Maranda Linț, Dorin Linț,Rozalia Marinescu, Dan Ștefan Marinescu, Mihai Monea, Steluța Monea, Marian Stroe*-Matematica de excelență, cls a VII-a,ed. Paralela45, Pitești 2013, **ISBN 978-973-4-1755-2**

[5] *** Gazeta Matematică, seria B, nr.6-7-8/2012 București, **ISSN1584-9333**

[6] *** Gazeta Matematică, seria B, nr.6-7-8/2014 București, **ISSN1584-9333**

[7] *** Gazeta Matematică, seria B, nr.1/2014 București, **ISSN1584-9333**

[8] *** Gazeta Matematică, seria B, nr.11/2013 București, **ISSN1584-9333**