CERCUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ LA MATEMATICĂ
CONSTANȚA
21 FEBRUARIE 2015

MODULUL II
TEMA 1:
PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Prof. Duca Elena Amelia

1. La un concurs se dau 4 probleme. Pentru rezolvarea corectă şi completă a primei probleme se acordă 2 puncte, 3 puncte pentru a doua, 5 puncte pentru a treia şi 9 puncte pentru a patra problemă. Pentru fiecare problemă nerezolvată sau incomplet rezolvată se acordă 1 punct din oficiu. (nu se acordă punctaje intermediare).
a) Arătaţi că dacă doi concurenţi au obţinut acelaşi punctaj, atunci au rezolvat, corect şi complet, aceleaşi probleme.
b) Demonstraţi că dacă suma punctajelor tuturor concurenţilor este un număr par mai mare sau egal decât 90, atunci, la una dintre probleme, cel puţin doi concurenţi au obţinut acelaşi punctaj.

2. Vom numi superprim un număr natural prim, mai mare decât 10, care îndeplineşte următoarele condiţii:
i) este format din cifre distincte;
ii) oricum am schimba ordinea cifrelor sale, obţinem tot un număr prim.
Determinaţi toate numerele superprime.

3. Vom numi un număr natural *n*, interesant, dacă $n \geq 2$ şi orice număr $k \in \mathbf{N}^*$, $k < n$, se scrie ca o sumă de divizori distincţi ai lui *n*. Arătaţi că produsul a două numere interesante este un număr interesant.

4. Pentru fiecare număr natural *n* notăm cu *s(n)* suma cifrelor sale. Fie *a* un număr natural cu 2012 cifre, care este divizibil cu 9. arătaţi că *s(s(s(a)))* este pătrat perfect.

5. Fie mulţimea $A = \left\{ \frac{2011}{2}, \frac{2012}{3}, \frac{2013}{4}, \frac{2014}{5}, ... \right\}$ Determinaţi mulţimea $B = A \cap \mathbf{N}$.

6. Arătaţi că, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$, are loc inegalitatea: $\frac{3^n}{n+1} > \frac{3^{n-1}}{n}$. Deduceţi din această inegalitate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$, $3^n > n+1$.

7. Fie şirul de fracţii: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, ...$ (acest şir se obţine după regula: se pleacă de la $n \in \mathbf{N}^*$ şi se obţin succesiv fracţiile $\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, ..., \frac{1}{n}$).
a) Aflaţi produsul primilor 55 de termeni ai şirului.

b) A câta fracţie din şir este $\dfrac{2011}{2012}$? Justificaţi răspunsul.

8. Se consideră un număr natural de şapte cifre, în scrierea zecimală a căruia se folosesc cel mult trei cifre distincte nenule. Arătaţi că se pot şterge trei cifre astfel încât numărul de patru cifre rămas şi răsturnatul său au un divizor comun mai mare sau egal cu 2.

9. Numerele *a, b, c* reprezintă lungimile laturilor unui triunghi. Ştiind că unul din cele trei numere le divide pe celelalte, arătaţi că triunghiul este isoscel.

10. Pe o tablă sunt desenate punctele coliniare , *A, O, C* în această ordine. Anghel şi Costel trasează, pe rând, semidreptele $[OA_1$ şi $[OC_1$, în sensul deplasării acelor de ceasornic, astfel încât $m(A\hat{O}A_1) = 3^0$ şi $m(C\hat{O}C_1) = 7^0$. La pasul următor, păstrând sensul, Anghel trasează semidreapta $[OA_2$ astfel încât $m(A_1\hat{O}A_2) = 3^0$ şi Costel trasează semidreapta $[OC_2$ astfel încât $m(C_1\hat{O}C_2) = 7^0$. Construcţia continuă după aceeaşi regulă (unghi de 3^0 urmat de unghi de 7^0), până la pasul final, fie acesta *n*, când semidreapta $[OC_n$ coincide cu semidreapta $[OA_n$.

a) Determinaţi *n*.

b) De câte ori, pe parcursul construcţiei, o semidreaptă trasată de Costel s-a suprapus peste o semidreaptă trasată anterior de Anghel?

11. Pe dreapta *d* se consideră punctele *A, B, C, D, E* astfel încât $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DE]$. Fie *M* un punct exterior dreptei *d* astfel încât distanţa de la punctul *B* la dreapta *AM* este egală cu distanţa de la punctul *D* la dreapta *ME*.Arătaţi că distanţele de la punctul *C* la dreptele *MA* şi *ME* sunt egale.

12. Fiecare punct al dreptei *d* se colorează cu una din culorile roşu sau albastru. Arătaţi că există trei puncte colorate cu aceeaşi culoare, astfel încât unul dintre ele să fie mijlocul segmentului determinat de celelalte două.

13. În interiorul unui unghi $A\hat{O}B$ cu măsura de 170^0 se construiesc 17 semidrepte distincte, cu originea în *O*, astfel încât cele 18 unghiuri formate au măsurile exprimate prin numre naturale nenule.

a) Arătaţi că printre cele 18 unghiuri există cel puţin două unghiuri congruente.

b) Dacă exact 5 unghiuri sunt congruente, aflaţi valoarea maximă a măsurilor lor.

14. Se consideră triunghiul echilateral *ABC* şi punctul *D* pe semidreapta opusă semidreptei *(BC*, astfel încât $[DB] \equiv [BC]$. Considerăm punctul *E* în semiplanul determinat de dreapta *AD* ce nu conţine punctul *B*, astfel încât *d(E, AB) = A, d(E, DC) = ED* şi *EA = ED,* iar punctul $F \in (BF)$ şi $[FD] \equiv [BC]$.

a) Demonstraţi că $\Delta FDE \equiv \Delta BAE$;

b) Arătaţi că *(EB* este bisectoarea unghiului $A\hat{E}D$.

TEMĂ

1. Considerăm numerele naturale nenule *a, b, c* astfel încât $(a+1)^b = (a+25)^c$. Demonstraţi că *b* + *c* este multiplu de 4.

2. Determinaţi cifrele nenule *a, b, c* pentru care $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\overline{a,b(c)}$.

3. **a)** Arătaţi că 30 007 este număr compus.
b) Arătaţi că şirul: 37, 307, 3007, 30007, ..., $3\underbrace{00...0}_{n\ ori}7$,... conţine o infinitate de numere compuse.

4. Despre numărul $N=\overline{abcde5}$ se ştie că este divizibil cu $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e$.
a) Arătaţi că cel puţin două dintre numerele *a, b, c, d, ,e* sunt egale.
b) Daţi exemplu de un astfel de număr.

5. Se consideră numărul $A_n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)(n^4+1)$, $n\in\mathbf{N}^*$**.** Aflaţi c.m.m.d.c. al numerelor $A_1, A_2, A_3, ..., A_{2000}$.

6. Fie o dreaptă *d* şi *A* şi *B* două puncte fixe, de o parte şi de alta a dreptei *d*. Spunem că un punct $M\in d$ are proprietatea *p* dacă $(AM)\equiv(BM)$. Demonstraţi că dacă pe dreapta *d* există două puncte cu proprietatea *p*, atunci toate punctele dreptei *d* au proprietatea *p*.

7. Fie $A=\{(a,b)\in N\times N\ /\ 10a+b\ se\ divide\ cu\ 19\}$ şi
$B=\{(a,b)\in N\times N\ /\ 2015a+2b\ se\ divide\ cu\ 19\}$. Arătaţi că *A* = *B*.