Tema 1. Probleme pregătitoare pentru Olimpiada de Matematică
21. 02. 2015

A. Probleme propuse

1. Suma a k numere naturale pare consecutive, $k \in N, k \geq 2$, este 56. Aflaţi numerele.

2. Fie $s = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + ... + 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot ...$
   a) Aflaţi al şaptelea termen al sumei;
   b) Stabiliţi dacă s este număr par sau impar;
   c) Aflaţi restul împărţirii numărului s la 24.

3. Aflaţi restul împărţirii numărului $a = 84^{17} + 42^{7} + 14^{3}$ la 168.

4. Determinaţi numerele de forma $\overline{xyz}$, ştiind că $\overline{x6} \cdot \overline{y7} = \overline{zz22}$.

   (O.J., Neamţ, 1999)

5. Pentru ce valori naturale ale lui n, numărul $m = 3 \cdot 6^{n-1} + 6^{n} + 2^{n+1} \cdot 3^{n}$ are exact şapte divizori formaţi dintr-o singură cifră?

6. Arătaţi că există $a, b, c \in N^{*}$ distincte, astfel încât $a^{3} + b^{3} + c^{3} = 2008^{2011}$.

   (OLM, Argeş, 2011)

7. Aflati 2 numere prime p şi q, ştiind că există $x, y \in N^{*}$ astfel încât $p = x^{2} + y^{2} + 1$ şi $q = x + y$.

8. Fie 5 numere naturale consecutive. Dacă suma a 4 dintre ele este 2014^{n}, arătaţi că produsul celor 4 numere este divizibil cu 4, oricare ar fi n număr natural mai mare sau egal cu 2.

9. Pătratul unui număr natural de 2 cifre , scris în baza 10, are forma $\overline{a(a+b)b}$, unde a, $a+b$ şi b sunt cifre, $a \neq 0$. Arătaţi că $a = b$ şi a este pătratul unui număr natural.

   (ONM, etapa judeţeană, Galaţi, 2004)

10. Un număr natural se numeşte "bipătrat" dacă suma şi produsul cifrelor sale sunt pătrate perfecte nenule. Determinaţi toate bipătratele de 2 cifre.

    (ONM, etapa locală , Brăila, 2008)

11. Fie $A=\{5n+4, 5n+5, 5n+9 / n\in N\}$ şi $B=\{m^2+2007 / m\in N\}$.
    a) Stabiliţi dacă $2013\in A$.
    b) Calculaţi $A\cap B$.

(G.M. 1/2013)

12. Fie $M=\{1,6,11,16,21,26,...,2001\}$ şi N o mulţime cu 203 elemente ale lui M.
    a) Arătaţi că suma elementelor lui N nu poate fi pătrat perfect.
    b) Arătaţi că există în N două elemente distincte a căror sumă este egală cu 2012.

13. Se consideră mulţimea $A=\{\overline{abcd} / a-d=b-c\}$.
    a) Arătaţi că $2013\in A$.
    b) Câte elemente ale lui A sunt divizibile cu 99?

14. Ioana vinde flori. Ea are un coş cu trandafiri, narcise şi lalele. Pretul pentru fiecare fel de floare este un număr natural egal cu jumătatea numărului iniţial de fire din tipul respectiv de floare. Dacă a reuşit să vândă toate florile, adunând astfel 140 de lei, aflaţi câte fire de trandafir a avut şi cât costă un trandafir, ştiind că aceştia erau în număr mai mare decât narcisele sau lalelele.

15. Într-un săculeţ sunt bile albe şi bile roşii care cântăresc in total 91 g. Fiecare bilă alba cântăreşte 7 g şi fiecare bilă roşie cântăreşte 5 g. Câte bile sunt în săculeţ?

16. Calculaţi suma a 10 numere naturale, ştiind că suma primelor nouă numere este 100, iar suma produselor dintre al zecelea număr cu fiecare dintre celelalte nouă este 300.

(G. M. 5/2012)

17. Găsiţi toate numerele naturale de forma $\overline{xyz}$, cu proprietatea că $\overline{xyz}-\overline{xy}-z$ este cub perfect.

18. Se consideră numerele naturale n, $n+2$, $4\cdot n$, $2\cdot n+3$, $3\cdot n+2$ unde $n > 2$. Ce valoare are n, ştiind că între cel mai mic şi cel mai mare dintre numere se află 65 numere naturale?

19. Aflaţi numerele naturale n pentru care numărul $A=1!+4!+7!+...+(3n+1)!$ este pătrat perfect, unde am notat $x!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot x,\quad x\in N^*$.

(G.M. 6/2011)

20. La o petrecere au fost 38 baieţi şi fete. Marius a adus flori pentru 5 fete, Radu a adus flori pentru 6 fete, Şerban a adus flori pentru 7 fete ş.a.m.d., iar ultimul băiat a adus flori pentru toate fetele. Câte fete au fost la petrecere?

(G. M 8-9/2009)

21. Fie un şir de numere naturale consecutive. Suma dintre primul şi ultimul este 294, iar media aritmetică a ultimelor 3 numere din şir este 235.
    a) Aflaţi primul şi ultimul termen al şirului.
    b) Calculaţi suma termenilor şirului.

22. Fie a, b, c cifre nenule în sistemul zecimal şi $S = \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{cb}$. Determinaţi toate numerele de forma $\overline{abc}$ dacă S = 550.

23. Fie mulţimile: $M_1 = \{1\}$; $M_2 = \{1;3\}$; $M_3 = \{1;3;6\}$; $M_4 = \{1;3;6;10\}$; $M_5 = \{1;3;6;10;15\}$;.....
    a) Arătaţi că există $k, p \in N^*$ astfel încât $55 \in M_k - M_p$.
    b) Aflaţi numărul elementelor divizibile cu 5 din M_{2006}.

B. Tema: problemele 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23

C. Bibliografie:

- Maranda Linţ,..., Matematica de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă, clasa a V-a, Piteşti, Editura Paralela 45, 2013
- Artur Bălăucă, Aritmetică - olimpiade, concursuri şi centre de excelenţă, clasa a V-a , Iaşi, Editura Taida, 2012
- Radu Gologan, Matematică: olimpiade şi concursuri şcolare: 2011-2012, Piteşti, Editura Paralela 45, 2012
- Gazeta matematică