Fisa nr. 1 – pregatire OJM martie 2015 –CLASA a X-a
Prof. Gobej Adrian

PROBLEMA NR. 1 – ARGES 2015

Stabiliți care dintre următoarele numere este mai mare : $a=\log_9 6$ sau $b=\log_{12} 8$.

G.M. nr. 12/2014

BAREM PB. 1 –ARGES 2015

$a=\frac{1}{2}(1+\log_3 2)$ 1p

$b=\frac{3\log_3 2}{2\log_3 2+1}$ 2p

$\frac{1}{2}<\log_3 2<1$ 2p

$x=\log_3 2$, $a<b\Leftrightarrow 2x^2-3x+1<0(A)$ 2p

PROBLEMA NR. 2 – ARGES 2015

Dacă $x\in R$ are proprietatea că $3^x+3^{-x}=7$. Calculaţi:

a) 9^x+9^{-x} ; b) 729^x+729^{-x}.

BAREM PB. 2 –ARGES 2015

$(3^x+3^{-x})^2=49\Rightarrow 9^x+9^{-x}+2=49\Rightarrow 9^x+9^{-x}=47$ 3p

$(9^x+9^{-x})^3=47^3\Rightarrow 9^{3x}+3\cdot 9^x\cdot 9^{-x}(9^x+9^{-x})+9^{-3x}=103823$

$729^x+729^{-x}=103682$ 4p

PROBLEMA NR. 3 – ARGES 2015

Fie $a,b,c\in(0,+\infty)$, $a+b+c=1$.Demonstrați că $a\sqrt[3]{7a+14b}+b\sqrt[3]{7b+14c}+c\sqrt[3]{7c+14a}\le 3$.

BAREM PB. 3 –ARGES 2015

$a\sqrt[3]{7a+14b}=\sqrt[3]{a^3(7a+14b)}=\sqrt[3]{a\cdot a\cdot(7a^2+14ab)}\le\frac{a+a+7a^2+14ab}{3}=\frac{2a+7a^2+14ab}{3}$

Şi analoagele 3p

$a\sqrt[3]{7a+14b}+b\sqrt[3]{7b+14c}+c\sqrt[3]{7c+14a}\le\frac{2a+2b+2c+7a^2+14ab+7b^2+14bc+7c^2+14ac}{3}$

$=\frac{2(a+b+c)+7(a+b+c)^2}{3}=\frac{2\cdot 1+7\cdot 1^2}{3}=3$ 4p

PROBLEMA NR. 4 – ARGES 2015

a) Să se calculeze :

$$E=\log_2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\log_2\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\log_2\left(1-\frac{1}{4^2}\right)+\ldots+\log_2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\log_2\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

b) Să se demonstreze că $E\le 0$ pentru $n\ge 1$.

BAREM PB. 4 –ARGES 2015

4) a) $E=\log_2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ 1p

$E=\log_2\left(\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)$ 1p

$E=\log_2\left[\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1-1)(n+2)}{(n+1)^2}\right]$ 1p

$E=\log_2\left(\frac{n+2}{2(n+1)}\right)$ ....
......2p

b) $E\le 0\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{n+2}{2(n+1)}\right)\le\log_2 1\Leftrightarrow n\ge 0$ 2p

PROBLEMA NR. 5 – ARGES 2015

Fie numerele a, m, n $\in(1,\infty)$, n $>$ m$\ge$a. Să se arate că: $\log_a\frac{n}{m}+1>\log_{m+1}(n+1)$

BAREM PB. 5 –ARGES 2015

Inegalitatea se mai poate scrie astfel :

$\log_a\frac{n}{m}>\log_{m+1}(n+1)-\log_{m+1}(m+1)$..1p

$\log_a\frac{n}{m}>\log_{m+1}\frac{n+1}{m+1}$ 1p

$\frac{n+1}{m+1}<\frac{n}{m}$ 1p

$\log_{m+1}\frac{n+1}{m+1}<\log_{m+1}\frac{n}{m}$ 1p

$a<m+1\Rightarrow\log_{m+1}\frac{n}{m}<\log_a\frac{n}{m}$ 1p

PROBLEMA NR. 6 – ARGES 2015

Fie funcția f : $\{1,2,\ldots\ldots,2n+1\}\to\{1,2,\ldots\ldots,2n+1\}$, astfel încât(fof) (x) = x .
Să se arate că f are un punct fix (există k astfel încât f(k) = k).

BAREM PB. 6 –ARGES 2015

fof (x) = x , iar g(x) = x este bijectivă => fof = bijectivă 1p
fie **E** = $\{1,2,\ldots\ldots,2n+1\}$ și presupunem prin MRA că f(k)$\neq$ k,$\forall$ k $\in$ **E** 1p
se consideră submulțimile lui E de forma $\{x_i,f(x_i)\}$ i=1,2,…p 1p
din f = bijectivă avem $x_i\neq x_j$ <=> $f(x_i)\neq f(x_j)$ 1p
dacăi$\neq$j => $x_i\neq f(x_j)$ ($x_i=f(x_j)$ => $f(x_i)=x_j$ și deci $\{x_i,f(x_i)\}=\{x_j,f(x_j)\}$............1p
=> **E** = $\cup_{i=1}^{p}\{x_i,f(x_i)\}$ 1p
Obținem card **E** = 2p , fals 1p

PROBLEMA NR. 7 – ARGES 2015

Se consideră funcțiile f,g,h : **N** → **N** , g și h bijective și f = g – h. Să se arate că f $\equiv 0$

BAREM PB. 7 –ARGES 2015

Se observă că f(n) $\ge$ 0 ....1p
g = bijectivă => $\exists$ $n_0\in$ N a.î. $g(n_0)=0$ => $h(n_0)=0$ 1p
se demonstrează prin inducție că f(n) = 0,după valorile lui g:
$G_{n-1}=g^{-1}\{0,1,\ldots n-1\}$ avem f(k) = 0 ,$\forall$ k$\in G_{n-1}$ 1p
$\exists$ $k_n\in$ N , a.î. $g(k_n)=n$, dacă $h(k_n)>n$, obținem $g(k_n)-h(k_n)<0$,fals............1p
finalizare f(n) = 0 ....3p

PROBLEMA NR. 8 – ARGES 2015

Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{2015} + i\sin\frac{2\pi}{2015}$. Să se arate că pentru $\forall\, z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$ avem $\sum_{k=0}^{2014} |z - \varepsilon^k|^2 = 4030$.

BAREM PB. 8 –ARGES 2015

Relația se poate scrie succesiv astfel:

$\sum_{k=0}^{2014} |z - \varepsilon^k|^2 = \sum_{k=0}^{2014} |z - \varepsilon^k| * |\bar{z} - \overline{\varepsilon^k}|$ ……………………………………………….............1p

$= \sum_{k=0}^{2014} (2 - z\overline{\varepsilon^k} - \bar{z}\,\varepsilon^k)$ ……………………………..………………………………………............1p

$= 4030 - z\sum_{k=0}^{2014} \overline{\varepsilon^k} - \bar{z} \sum_{k=0}^{2014} \varepsilon^k$ …………………………………………………………..…………..1p

dar $\varepsilon^{2015} = \bar{\varepsilon}^{2015} = 1$ ………………………………………………………………………………1p

$1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^{2014} = \frac{1-\varepsilon^{2015}}{1-\varepsilon} = 0$ …………………………………………………………1p

analog $1 + \bar{\varepsilon} + \ldots + \bar{\varepsilon}^{2014} = 0$ ……………………………………………………….....1p

finalizare ……………………………………………………………………………………1p

STE TEST FINAL – ARGES 2015

1.a) Calculati $E(a) = \left\{a + \left[1 + \left(\frac{3-a}{a+1}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1}$ si aflati valoarea pentru $a = -\frac{1}{4}$.

b) Calculati $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

2.a) Daca $a_1, a_2, \ldots a_n \in (0,1)$ sau $a_1, a_2, \ldots a_n \in (1,\infty)$, atunci demonstrati ca

$$\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \ldots \ldots \frac{1}{\log_{a_{n-1}} a_n} + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geq n.$$

b) Fie $x \in [1, 64]$. Determinati x astfel incat $(\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2\left(\log_2 \frac{8}{x}\right)$ sa aiba valoare maxima.

3.Fie $z_n = (1+i)^n + (1-i)^n$

a) Calculati z_2 si z_{2015}

b) Dovediti ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ numarul $z_n \in \mathbb{R}$.

4.Fie $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Dovediti ca $(z_1)^3 = 1$ si $(z_1)^2 + z_1 + 1 = 0$

b) Calculati $(1-z_1)(1-z_1^2)(1-z_1^4)(1-z_1^5)$

c) Dovediti ca $Q \overset{not.}{=} (1-z_1)(1-z_1^2)(1-z_1^4)\cdot\ldots\cdot(1-z_1^{2012})(1-z_1^{2014})(1-z_1^{2015}) = z_1^{672}$

BAREM TEST FINAL –ARGES 2015

1.a. $G \; a \overset{\text{notati}}{=} \left[1+\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^{-1}\right]^{-1}$ si obtineti forma cea mai simpla pentru $G \; a$ 1p

Obtineti forma cea mai simpla pentru $E \; a$ 1p

Calculati $E\left(-\frac{1}{4}\right)$ 1p

1.*b*. $P \overset{\text{notati}}{=} \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\,\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ si obtineti valoarea lui P 2p

$Q \overset{\text{notati}}{=} \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot P$ si obtineti valoarea lui P 1p

Calculati valoarea lui T. 1p

Subiectul2

2.a. Daca $a_1, a_2, ...a_n \in \; 0,1$ sau $a_1, a_2, ...a_n \in \; 1,\infty$,dovediti ca numerele din $*$

$\frac{1}{\log_{a_1} a_2}, \frac{1}{\log_{a_2} a_3}, .. \frac{1}{\log_{a_{n-1}} a_n}, \frac{1}{\log_{a_n} a_1}$ sunt numere pozitive. 2p

Folosind proprietatile logaritmului si inegalitatea mediilor obtineti rezultatul 1p

2.b. Calculati $\left(\log_2 \frac{8}{x}\right) = 3 - \log_2 x$ si $t \overset{\text{notatie}}{=} \log_2 x$ cu $t \in \; 0,6$ $\quad *$ 1p

$P \overset{\text{notatie}}{=} \; \log_2 x \;^4 + 12 \; \log_2 x \;^2 \cdot \left(\log_2 \frac{8}{x}\right) \overset{\text{notatie}\, *}{=} \; t^2 - 6t \;^2$, cu $x \in \; 1,64 \Rightarrow t \in \; 0,6$ 2p

Valoarea maxima a lui P cand $t \in [0,6]$ este t=3 $\Leftrightarrow \; 3 = \log_2 x \Leftrightarrow x = 8$ 1p

Subiectul3

3.a. Calculati z_2 si se obtine $z_2 = 0 \in \mathbb{R}$, 2p

Calculati z_{2015} si se obtine$z_{2015} = \left[\; 1+i \;^2\right]^{1007} \; 1+i \; + \left[\; 1-i \;^2\right]^{1007} \; 1-i \; \in \mathbb{R}$ 2p

3b. Calculati z_{2p} si dovediti ca este numar real 2p

Calculati z_{2p+1} si dovediti ca este numar real 1p

Subiectul4

4.a) Calculati si dovediti ca $z_1 \;^3$ =1 si $z_1 \;^2 + z_1 + 1 = 0$ 3p

b) Calculati $P \overset{\text{not.}}{=} \; 1 - z_1 \;\; 1 - z_1^2 \;\; 1 - z_1^4 \;\; 1 - z_1^5 \; = \; 1 - z_1 \;\; 1 - z_1^2 \;\; 1 - z_1 \;\; 1 - z_1^2$ 1p

$P \overset{\text{not.}}{=} \left[\; 1 - z_1 \;\; 1 - z_1^2 \;\right]^2 = \left(-z_1^{\;2} - z_1 + z_1^3\right)^2 = 3^2 = 9$ 2p

c) Q are 672 de factori egali cu $\left(-z_1\right)\left(-z_1^2\right) \Rightarrow Q \overset{\text{not.}}{=} \left[\left(-z_1\right)\left(-z_1^2\right)\right]^{672} = 3^{672}$ 1p