OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a IX-a

Problema 1. Se consideră o mulţime $G \subset \mathbb{R}$ care satisface simultan proprietăţile:

a) $1 \in G$;

b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G$;

c) $\sqrt{x+3} \in G \Rightarrow x+4 \in G$;

Arătaţi că $\mathbb{N}^* \subset G$.

Lucian Dragomir, Gazeta Matematică nr. 12/2014

Problema 2. Determinaţi termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2 \text{ şi } x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2}{\left[\sqrt{x_n^2 + x_{n+1}}\right]} - \frac{1}{n},\ n \geq 1.$$

Marius Perianu, Slatina

Problema 3. Fie *ABCD* un patrulater înscris într-un cerc de centru *O*. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor *ABC*, *BCD*, *CDA*, respectiv *DAB* şi cu *M*, *N* mijloacele diagonalelor [*AC*], respectiv [*BD*].

a) Arătaţi că segmentele $[DH_1]$, $[AH_2]$, $[BH_3]$ şi $[CH_4]$ au acelaşi mijloc *P*.

b) Arătaţi că punctele *O*, *P* şi mijlocul segmentului [*MN*] sunt coliniare.

c) Arătaţi că dacă triunghiurile MH_1H_3 şi NH_2H_4 au acelaşi centru de greutate, atunci patrulaterul *ABCD* este dreptunghi.

[∗∗∗]

Problema 4. Arătaţi că pentru orice numere reale $a,b,c>0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a^3 - ab\sqrt{ab}}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3 - bc\sqrt{bc}}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3 - ca\sqrt{ca}}{c^2+ca+a^2} \geq 0.$$

Costel Anghel, Negreni, Olt

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a X-a

Problema 1. Determinaţi numerele reale *x* pentru care $x^{\sqrt{x}} < \left(\sqrt{x}\right)^x$.

Aurel Chiriţă, Slatina

Problema 2. Demonstraţi că pentru orice număr natural $n \geq 2$ are loc inegalitatea:

$$\lg 2 \cdot \lg 4 \cdot \ldots \cdot \lg(2n) < \lg^n (n+1) .$$

Eduard Buzdugan, Slatina

Problema 3. Se consideră numerele complexe, nenule şi distincte z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Ştiind că numerele $w_1 = z_2 + z_3 + \frac{z_2 z_3}{z_1}$, $w_2 = z_3 + z_1 + \frac{z_3 z_1}{z_2}$ şi $w_3 = z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{z_3}$ sunt reale, arătaţi că $w_1 = w_2 = w_3 = 0$.

Marius Perianu, Slatina

Problema 4. Rezolvaţi ecuaţia:

$$(3^x + 2)^{\log_5 3} + 2 = (5^x - 2)^{\log_3 5} .$$

Marius Perianu, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2014

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A^2 + I_2) = \det\left(A + \det A \cdot I_2\right) - 3\det A$.

Arătaţi că $|\det A| \geq 2$.

Marius Perianu, Slatina

Problema 2. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ care verifică relaţiile:

$$\det(A^4 + A^2B^2 + B^4) = 9 \quad \text{şi} \quad \det(A^2 + B^2) + \det(AB) = 5.$$

Calculaţi $\sqrt{\det(A^2 + AB + B^2)} + \sqrt{\det(A^2 - AB + B^2)}$.

Traian Tămîian, Gazeta Matematică nr. 5/2014

Problema 3. **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right) = \ln 2$.

b) Calculaţi limita şirului cu termenul general

$$a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{2+\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n^2+n}}, \ n \geq 1.$$

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 4. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_1 \in (1,2) \ \text{şi} \ x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n^2 + x_n + 1, \ n \geq 1.$$

Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

Florin Nicolaescu, Balş

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi mulţimea

$$Z(G)=\left\{x\in G \,\middle|\, xy=yx, \forall y\in G\right\}.$$

a) Arătaţi că $Z(G)$ este subgrup al lui $(G,\cdot)$.

b) Arătaţi că dacă $x^2=e$ pentru orice $x\in G\setminus Z(G)$, atunci grupul G este abelian.

Mihai Opincariu, Gazeta Matematică nr. 12/2014

Problema 2. Calculaţi $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}dx$.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 3. Se consideră un monoid $(M,*)$ cu următoarea proprietate de simplificare:

dacă $a,b,c,d,x\in M$ verifică relaţia $a*x*b=c*x*d$, atunci $a*b=c*d$.

Arătaţi că monoidul $(M,*)$ este comutativ.

Dorin Mărghidanu, Corabia

Problema 4. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie crescătoare şi continuă în a. Arătaţi că funcţia

$$F:[a,b]\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

este crescătoare dacă şi numai dacă $f(a)\geq 0$.

Florian Dumitrel, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.