MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015
CLASA a IX - a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiect 1, prelucrare *Ovidiu Șontea*

a) Pe insula I trăiesc oameni cinstiți care spun totdeauna adevărul și mincinoși care totdeauna mint. Un explorator a întâlnit doi indigeni A și B.

Localnicul A a spus:

-Cel puțin unul dintre noi (A și B) este mincinos.

Se poate stabili cum este A și cum este B ? (mincinos sau cinstit). Justificare.

b) Arătați că $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2014}{2015!}<1$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă A ar fi mincinos, atunci enunțul său nu ar fi adevărat, deci ambii sunt cinstiți. Contradicție.	2p
Deci A este cinstit.Enunțul său este adevărat, deci B este mincinos.	2p
b) $\sum_{k=1}^{2014}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{2014}\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{2014}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$	2p
Finalizare.	1p

Subiect 2,G.M.6-7-8/2014

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$x^2+2[x]\{x\}+3\{x\}^2=4.$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$x=[x]+\{x\}$.	1p
Obținerea unei ecuații echivalente $([x]+2\{x\})^2=4$	2p
Observația $2\{x\}\in\mathbb{Z}$.	1p
$\{x\}\in\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$.	1p
Finalizare si obținerea soluțiilor $x\in\left\{-2,2,\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right\}$.	2p

Subiect 3, autor ***

Se consideră numerele reale $a,b>0$, patrulaterul convex $ABCD$ și punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD), Q \in (DA)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{DP}{PC} = a$, respectiv $\frac{AQ}{QD} = \frac{BN}{NC} = b$.

a) Să se arate că $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{1+a}\left(\overrightarrow{AD} + a\overrightarrow{BC}\right)$

b) Să se arate că dacă $MP \cap NQ = \{O\}$, atunci $\frac{MO}{OP} = b, \frac{QO}{ON} = a$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}, \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}$. Prin înmulțirea celei de-a doua relații cu a și prin adunarea la prima se obține rezultatul.	3p
b) Fie punctul $R \in (QN)$ astfel încât $\frac{QR}{RN} = a$. Folosind a) $\overrightarrow{MR} = \frac{1}{1+a}\left(\overrightarrow{AQ} + a\overrightarrow{BN}\right), \overrightarrow{RP} = \frac{1}{1+a}\left(\overrightarrow{QD} + a\overrightarrow{NC}\right)$. Prin înmulțire cu b a celei de-a doua relații și prin scădere din prima se obține $\overrightarrow{MR} = b\overrightarrow{RP}$. Deci M,R,P coliniare, deci $R=O$.	3p
Finalizare	1p

Subiect 4, autor ***

Se consideră mulțimile :

$A = \{5p+7q \mid p,q \in \mathbb{N}\}$, $B = \{5p+7q \mid p,q \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{35p+14q \mid p,q \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se determine $card(\mathbb{N} \setminus A)$.

b) Să se determine $\mathbb{Z} \setminus B$.

c) Să se determine mulțimea C.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Aplicăm varianta III a inducției matematice. Determinăm 5 numere naturale consecutive ce aparțin lui A, apoi aplicăm inducția de „pas 5". Prin încercări succesive determinăm : $25 = 5\cdot5+7\cdot0$, $26 = 5\cdot1+7\cdot3$, $27 = 5\cdot4+7\cdot1$, $28 = 5\cdot0+7\cdot4$, $29 = 5\cdot3+7\cdot2$. Presupunem că pentru $t \geq 25$ avem $t = 5p+7q \Rightarrow t+5 = 5(p+1)+7q$, deci $\forall t \geq 25 \Rightarrow t \in A$. Din încercările precedente deducem $card(\mathbb{N} \setminus A) = 13$.	3p
b) Cum $(5,7)=1$, rezultă că există $k,l \in \mathbb{Z}$ pentru care $1 = 5k+7l$. Prin înmulțire cu $t \in \mathbb{Z}$ se deduce $t = 5kt+7lt$, deci $\mathbb{Z} \subseteq B$. Cum $B \subseteq \mathbb{Z}$, rezultă $B = \mathbb{Z}$.	2p
c) Oricare $x \in C \Rightarrow 7 \mid x$, deci $7\mathbb{Z} \subseteq C$. Cum $(35,14) = 7$, există $s,l \in \mathbb{Z}$ pentru care $7 = 35s+7l$. Fie $t \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7t = 35st+7lt$, deci $7\mathbb{Z} \subseteq C$. Deducem că $C = 7\mathbb{Z}$.	2p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015 -

CLASA A X-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiect 1, autor ***

Fie funcția $f:[0,\infty)\to(0,\infty), f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

a) Arătați că funcția este strict monotonă.

b) Arătați că imaginea funcției este $(0,1]$.

c) Determinați funcția $g:(0,1]\to\mathbb{R}$ care are proprietatea $g(f(x))=2x+3$, oricare ar fi $x\in[0,\infty)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ pentru $x\geq 0$, formulă care descrie o funcție strict descrescătoare	2p
b) Din monotonie $f(x)\leq f(0)=1$ și din definiție $f(x)>0$, oricare ar fi $x\geq 0$	1p
Pentru orice $y\in(0,1]$ există $x=(1-y^2)^2/4y^2\geq 0$ astfel încât $f(x)=y$	2p
c) Notând $f(x)=t$, $g(t)=2(1-t^2)^2/4t^2+3$	1p
Deoarece pentru orice $t\in(0,1]$ există $x\in[0,\infty)$ astfel încât $f(x)=t$, formula de mai sus definește funcția căutată	1p

Subiect 2, autor ***, supliment G.M.4/2014 și supliment G.M. 11/2014

a) Fie z și w două numere complexe diferite, astfel încât $|z|=|w|$ și $|1+z|=|1+w|$. Arătați că $z=\overline{w}$.

b) Arătați că dacă z este un număr complex de modul 1 și $z\neq\pm i$, atunci $x=\dfrac{z}{z^2+1}$ este număr real. Determinați mulțimea $\left\{\dfrac{z}{z^2+1}\,\middle|\, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, z\neq\pm i\right\}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\lvert z\rvert^2=z\overline{z}, \lvert 1+z\rvert^2=1+z+\overline{z}+z\overline{z}$	1p
Ipoteza devine $z+\overline{z}=w+\overline{w}, z\overline{z}=w\overline{w}$	1p
Există doar posibilitățile $z=w,\overline{z}=\overline{w}$ sau $z=\overline{w},\overline{z}=w$, dintre care convine doar a doua	1p

b) Din ipoteză $z=\cos a+i\sin a$, $\cos a\neq 0$, deci $x=\dfrac{\cos a+i\sin a}{1+\cos 2a+i\sin 2a}=\dfrac{1}{2\cos a}\in\mathbb{R}$	**2p**
Mulțimea valorilor lui x este $(-\infty,-1/2]\cup[1/2,\infty)$.	**2p**

Subiect 3, autor *Eugen Radu*

Arătați că, pentru orice număr natural n, $[\sqrt[3]{7n+1}]=[\sqrt[3]{7n+5}]$ (unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x).

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Cerința este echivalentă cu faptul că nu există cuburi perfecte între $7n+1$ și $7n+5$	**3p**
Resturile cuburilor perfecte la împărțirea cu 7 sunt 0, 1, sau 6	**3p**
Finalizare	**1p**

Subiect 4, autor *Eugen Radu*

Rezolvați ecuația $2^x+1=(3^x-1)^{\log_2 3}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Deoarece $\log_2 3$ este irațional, trebuie $3^x-1>0$, adică $x>0$	**1p**
Logaritmând în baza 3 obținem $\log_3(2^x+1)=(\log_2 3)(\log_3(3^x-1))=\log_2(3^x-1)$	**2p**
Dacă notăm cu y valoarea comună a celor doi logaritmi, atunci $2^x+1=3^y, 3^x-1=2^y$	**2p**
Deducem $2^x+3^x=2^y+3^y$, de unde $x=y$	**1p**
Ecuația $2^x+1=3^x$ are soluția unică $x=1$	**1p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015 -

CLASA A XI-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiect 1, autor ***

O matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ are proprietățile $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix}$ și $A^3=\begin{pmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix}$. Arătați că $A^n=\begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$ rezultă $bc=0$.	2p
Dacă $b=c=0$, atunci $A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$ și concluzia este verificată.	1p
Dacă, de exemplu, $b=0\neq c$, atunci $c=a+d$ și rezultă $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ ac^2+cd^2 & d^3 \end{pmatrix}$, de unde $ad=0$. În cazul $a=0$ obținem $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & d \end{pmatrix}$, de unde $A^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^n & d^n \end{pmatrix}$, iar în cazul $d=0$ obținem $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	3p
Cazul $c=0\neq b$ se tratează similar (sau se reduce la cazul precedent înlocuind A cu ${}^tA$)	1p

Subiect 2, autor ***

Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $k\in\mathbb{N}^*$ și matricea $A\in M_n(\mathbb{R})$ pentru care are loc relația : $A^{4k+1}=A^{4k-1}+A^{4k-2}+...+A+I_n$. Să se demonstreze că :

a) A este inversabilă;

b) $\det(A+I_n)\geq 0$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Relația este echivalentă cu $A\left(A^{4k}-A^{4k-2}-...-I_n\right)=I_n$, deci A este inversabilă.	2p
Adunăm în ambii membrii ai egalității A^{4k} și obținem : $A^{4k}\left(A+I_n\right)=A^{4k}+A^{4k-1}+...+A+I_n$. Fie $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{4k+1}+i\sin\frac{2k\pi}{4k+1}, 1\le k\le 4k$ rădăcinile complexe diferite de 1 ale polinomului $P(X)=X^{4k}+X^{4k-1}+...+X+1$.	2p
$\det\left(A^{4k}+A^{4k-1}+...+A+I_n\right)=\det\left(\prod_{k=1}^{2n}\left(A-\varepsilon_k\cdot I_n\right)\left(A-\overline{\varepsilon_k}\cdot I_n\right)\right)=\prod_{k=1}^{2n}\left\|\det\left(A-\varepsilon_k\cdot I_n\right)\right\|^2\ge 0$, de unde deducem concluzia.	3p

Subiect 3, GM 10/2014 și supliment GM 4/2014

a) Arătați că dacă $a,b,c>0$ sunt numere reale iar șirul cu termenul general

$$x_n=\frac{a}{b^n}+\frac{b}{c^n}+\frac{c}{a^n}, n\in\mathbb{N}$$

este convergent, atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton.

b) Determinați limita șirului $(x_n)_{n\ge 1}$ definit prin $x_1=1$ și $x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+\frac{1}{2^n}}$ pentru $n\ge 1$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă unul dintre numere, de exemplu a, este subunitar, atunci $x_n>\frac{c}{a^n}$ și $\frac{c}{a^n}\to+\infty$ implică $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$, contradicție	2p
Deducem că $a,b,c\ge 1$, deci șirurile $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c^n)_{n\in\mathbb{N}}$, sunt crescătoare iar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.	2p
b) Din $x_{n+1}^2=x_n^2+\frac{1}{2^n}$ rezultă $x_n^2=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$	2p
$x_n=\sqrt{2-\frac{1}{2^{n-1}}}\to\sqrt{2}$	1p

Subiect 4, autor *Mihail Băluță*

Fie $n\ge 2$ un număr natural și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție. Precizați, justificând răspunsul, dacă următoarele afirmații sunt adevărate:

a) oricare ar fi funcția f, dacă $\lim_{x\to 0}f(x)\sin nx=0$, atunci $\lim_{x\to 0}f(x)\sin x=0$;

b) oricare ar fi funcția f, dacă $\lim_{x\to\infty}f(x)\sin x=0$, atunci $\lim_{x\to\infty}f(x)\sin nx=0$;

c) oricare ar fi funcția f, dacă $\lim_{x\to\infty}f(x)\sin nx=0$, atunci $\lim_{x\to\infty}f(x)\sin x=0$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Adevărat: $\lim_{x\to 0}f(x)\sin x=\lim_{x\to 0}f(x)\sin nx\frac{\sin x}{\sin nx}=0\cdot\frac{1}{n}=0$	2p
b) Adevărat: din $\|\sin nx\|\le n\|\sin x\|$ și $\lim_{x\to\infty}n\|f(x)\sin x\|=0$ reiese $\lim_{x\to\infty}\|f(x)\sin nx\|=0$	2p

Din $\lim_{x\to\infty} \lvert f(x)\sin nx \rvert = 0$, rezultă $\lim_{x\to\infty} f(x)\sin nx = 0$	1p
c) Fals: de exemplu, luăm $f(x)=1$, dacă $x=\pi/n+2k\pi, k\in\mathbb{N}$ şi $f(x)=0$ în rest	1p
$f(x)\sin nx = 0$, oricare ar fi x, deci $\lim_{x\to\infty} f(x)\sin nx = 0$, pe când $f(x)\sin x = \sin \pi/n \neq 0$ dacă $x=\pi/n+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, deci $\lim_{x\to\infty} f(x)\sin x$ nu este 0	1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE — SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA — INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015
CLASA a XII - a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor prof. Marcel Țena, C.N.S.S..

1. Fie $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ un endomorrfism al grupului $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

a) Determinați $f(-1)$

b) Să se determine toate endomorfismele f cu proprietatea că $f(p) = p$, pentru orice $p > 0$, p număr prim.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Fie $q \in Q^*$. Atunci q se poate scrie ca $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$ unde $p_1, p_2, ..., p_k$ sunt numere naturale prime, iar $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sunt numere întregi.	1p
$f(q) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}) = (f(p_1))^{\alpha_1} \cdot (f(p_2))^{\alpha_2} \cdot ... \cdot (f(p_k))^{\alpha_k} = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k} = q$ Deci $f(q) = q$, pentru orice $q > 0$.	1p
Deoarece $(-1)^2 = 1$, avem $f((-1)^2) = f(1)$, deci $(f(-1))^2 = f(1) = 1$, deci $f(-1) = \pm 1$.	1p
$f(-1) = 1$, de unde $f(q) = f(-r) = f(-1)f(r) = r = -q$. Atunci, pentru orice $q \in Q^*$, $f(q) = \begin{cases} q, \text{ pentru } q > 0 \\ -q, \text{ pentru } q < 0 \end{cases} = \lvert q \rvert$. Funcția f este endomorfism .	2p
$f(-1) = -1$, de unde $f(q) = f(-r) = f(-1) \cdot f(r) = -r = q$, deci $f(q) = q$, pentru orice $q \in Q^*$.	2p

Enunț subiect 2, autor *** , GM nr 9/2014

Fie a un număr real fixat și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și nu se anulează.

Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \le a \\ 2f(x), & x > a \end{cases}$, nu are primitive.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Fie $F : R \to R$ o primitivă a lui f. Să presupunem că g are o primitivă $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.	2p

Atunci $G(x)=\begin{cases} F(x)+C_1, & x\le a\\ 2\cdot F(x)+C_2, & x>a\end{cases}$	
G este o funcție continuă pe $\mathbb{R}$, deci continuă în punctul a, deci $\lim\limits_{x\nearrow a}G(x)=\lim\limits_{x\searrow a}G(x)=G(a)$ de unde $F(a)+C_1=2F(a)+C_2$	1p
G este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci și în punctul a, de unde $\lim\limits_{x\nearrow a}\frac{G(x)-G(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\searrow a}\frac{G(x)-G(a)}{x-a}=g(a)=f(a)$.	1p
$\lim\limits_{x\nearrow a}\frac{G(x)-G(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\nearrow a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$.	1p
$\lim\limits_{x\searrow a}\frac{G(x)-G(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\searrow a}\frac{2\cdot F(x)+C_2-F(a)-C_1}{x-a}=\lim\limits_{x\searrow a}\frac{2\cdot(F(x)-F(a))}{x-a}=2\cdot F'(a)=2\cdot f(a)$	1p
Obținem $f(a)=2f(a)$, de unde $f(a)=0$, imposibil	1p

Enunț subiect 3, autor****

Fie $I_n=\int\limits_0^{\pi/2}(\sin x)^n dx$, $n\in\mathbb{N}$

a) Să se arate că $nI_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2}$, $n\ge 1$

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot I_n)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$I_n=\int\limits_0^{\pi/2}(\sin x)^n dx=-\cos x\cdot(\sin x)^{n-1}\Big\vert_0^{\pi/2}+(n-1)\int\limits_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}\cdot(1-\sin^2 x)dx$	2p
Deci $I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$, de unde $nI_n=(n-1)I_{n-2}$	1p
Avem și $(n+1)I_nI_{n+1}=nI_nI_{n-1}$, $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$, de unde $nI_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2}$, pentru orice n natural	1p
Avem $I_{n+1}<I_n$, de unde $(n+1)I_{n+1}I_n<(n+1)I_n^2$, deci $I_n>\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}$. Obținem $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot I_n)=\infty$.	3p

Enunț subiect 4, autor****

a) Pe mulțimea $A=\left\{\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\ldots,\sqrt[145]{145}\right\}$ să se introducă două structuri : una de grup comutativ și una de grup necomutativ.

b) Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ și notăm $H=(a,b)$. Să se introducă pe H o structură de grup comutativ.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\lvert A\rvert=144$. Vom aplica teorema de transport a structurii de grup. Cazul comutativ. Grupul $(\mathbb{Z}_{144},+)$ este comutativ. Funcția $f:A\to\mathbb{Z}_{144}, f\left(\sqrt{2}\right)=\overline{0}, f\left(\sqrt[3]{3}\right)=\overline{1},\ldots,f\left(\sqrt[145]{145}\right)=\overline{143}, unde\ \mathbb{Z}_{144}=\left\{\overline{0},\ldots,\overline{143}\right\}$ este bijectivă, deci există o unică structură de grup pe A pentru care f realizează izomorfismul.	2p
Cazul necomutativ $144=3!\cdot4!$ Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se notează $(S_n,\circ)$ grupul permutărilor de grad n. Considerăm grupul produs direct $(S_3\times S_4,\cdot)$, unde operația $\cdot$ se definește astfel : $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1\circ x_2,y_1\circ y_2)$, $x_1,x_2\in S_3$, $y_1,y_2\in S_4$. Avem $\lvert S_3\rvert=3!$, $\lvert S_4\rvert=4!\Rightarrow\lvert S_3\times S_4\rvert=3!\cdot4!=144=\lvert A\rvert$. Grupul $(S_3\times S_4,\cdot)$ este necomutativ (este suficient ca un factor să fie necomutativ, în cazul nostru chiar ambele sunt necomutative) și aplicăm teorema de transport a structurii. Deci A devine grup necomutativ.	3p
b) Funcția $h:(a,b)\to\mathbb{R}$, $h(x)=ctg\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$ este bijectivă și aplicăm teorema de transport a structurii din grupul comutativ $(\mathbb{R},+)$ la (a,b): $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1\circ x_2=h^{-1}\left(h(x_1)+h(x_2)\right)$, deci $\left((a,b),\circ\right)$ este grup comutativ.	2p