



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1.

Fie A o matrice de ordin doi cu elemente reale și A^t matricea transpusă. Știind că $\det(A + A^t) = 8$ și $\det(A + 2A^t) = 27$, să se calculeze $\det(A)$.

GMB

SUBIECTUL 2.

Fie $A \in M_3(C)$ inversabila, cu $\det(A) = 1$. Demonstrați echivalența:

$$\det(A + I_3) = \det(A - I_3) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(A^{-1}) = -1$$

Nelu Chichirim

SUBIECTUL 3.

Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$ cu $x_1 \in (0, 1)$ dat, $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $\forall n \geq 1$ și $y_n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

- a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
- b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (x_1 - y_n)$

Niculae Cavachi

SUBIECTUL 4.

Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit astfel: $x_1 > \sqrt{3}$ și $x_n = \frac{x_{n-1}}{\sqrt{1 + nx_{n-1}^2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- b) Să se arate că șirul $(nx_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

Cătălin Zîrnă

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.