OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 15.02.2015
Clasa a V-a

1. Calculaţi :
   a. $3^2 \cdot \{5 - 2^3 \cdot [2004 - 3(2004 : 2^2 + 13^2 - 2 \cdot 2004^0)]\}$
   b. suma primelor 2015 numere naturale
   c. produsul primelor 2015 numere naturale.

Prof. Burlan Adrian

2. Se dau sumele $S = 5 + 15 + 25 + \cdots + 1005$ şi $s = 1 + 3 + 5 + \cdots + 201$. Atunci:
   a. Arătaţi că sumele S şi s au acelaşi număr de termeni.
   b. Găsiţi un divizor de trei cifre al diferenţei $S - s$.
   c. Arătaţi că diferenţa $S - s$ este pătrat perfect.

Prof. Statie Ileana

3. Daniela împreună cu tatăl ei şi cu bunica sa au 90 ani. Peste 2 ani tata va avea de 8 ori vârsta fiicei, iar bunica de 2 ori vârsta actuală a tatălui. Ce vârstă are fiecare ?

G.M. 11/2014 Supliment

4. Dacă $a = 10^{59} - 9 \cdot 10^{58}$ şi

$b = 5^4 \cdot 25^{11} \cdot 125^{10} \cdot (2^{59} + 2^{58} + 2^{57} + 2^{56})$, atunci:

   a. Comparaţi a cu b.
   b. Aflaţi ultimele 114 cifre ale numărului $n = (a + b)^2$.
   c. Arătaţi că restul împărţirii numărului a la b este cub perfect.

Prof. Statie Alexandru

Timp de lucru: 2 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.
Toate subiectele sunt obligatorii.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 15.02.2015
CLASA A VI-A

1. **(7p)** Găsiți cifrele nenule *a*, *b*, *c*, astfel încât

$$22{,}5 \cdot [\,\overline{a,b(c)} - \overline{a,c} + \overline{b,c(a)} - \overline{b,a} + \overline{c,a(b)} - \overline{c,b}\,] = 1.$$

Nicolae Ivășchescu, Craiova, Gazeta Matematică 2/2014 – Supliment

2. Se consideră numărul natural $A = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2013} + 3^{2014} + 3^{2015}$.

(3p) a) Arătați că numărul *A* este divizibil cu 52.

(2p) b) Arătați că $A = (3^{2016} - 1) : 2$ și că $A > 5^{1209}$.

(2p) c) Aflați restul împărțirii numărului *A* la 121.

Prof. Constantin Popescu, Șc. Gim. „Take Ionescu" Râmnicu Vâlcea

3. Fie *BOA* și *BOC* două unghiuri adiacente complementare, (*OD* bisectoarea unghiului *BOA* și (*OE* bisectoarea unghiului *COD*. Considerăm cazul în care semidreapta (*OE* este interioară unghiului *COB*.

(3p) a) Dacă măsura unghiului *DOA* este de x^0, $x \in \mathbb{N}^*$, $(x < 30^0)$, exprimați măsura unghiului *BOE* în funcție de măsura unghiului *DOA* (în funcție de x^0).

(2p) b) Dacă măsura unghiului *BOE* este de 12^0, aflați măsura unghiului *DOA*.

(2p) c) Determinați măsura unghiului *DOA* știind că $m(\sphericalangle BOE) = \frac{3}{8} \cdot m(\sphericalangle DOA)$.

Prof. Gheorghe Radu, C.N.I. „Matei Basarab", Râmnicu Vâlcea
Prof. Cristina Pîrvuță, Șc. Gim. Nr.10, Râmnicu Vâlcea

4. Se consideră triunghiul *ABC* oarecare cu *AB* < *AC*. Pe semidreapta (*AB* se consideră punctul *D* astfel încât $(AD) \equiv (AC)$, iar pe segmentul (*AC*) se consideră punctul *E* astfel încât $(AE) \equiv (AB)$. Se notează cu *M* mijlocul segmentului (*BC*), cu *N* mijlocul segmentului (*DE*) și cu *O* intersecția dreptelor *BC* și *DE*.

(4p) a) Demonstrați că triunghiul *AMN* este isoscel.

(3p) b) Arătați că (*AO* este bisectoarea unghiului *MAN*.

Prof. Tiberiu Pigui, Liceul „Antim Ivireanu", Râmnicu Vâlcea

Timp de lucru: 2 ore.
Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte.
Toate subiectele sunt obligatorii.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 15.02.2015
CLASA A VII-A

SUBIECTUL 1

Fie numerele: $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2013}{2014}$ și $B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2014}{2015}$.

a) Să se calculeze $A \cdot B$

b) Să se arate că a patra zecimală a numărului A^2 este cel mult 4.

Prof. Badea Cătălin, Rm. Vâlcea

SUBIECTUL 2

Se consideră o mulțime $A \subseteq Z$ care are proprietățile:

(1) $0 \in A$ și

(2) dacă $2a - 3b \in A$, atunci $a \in A$ și $b \in A$.

Arătați că $A = Z$.

G.M. nr. 12 / 2014 (Adriana Dragomir, Oțelul Roșu)

SUBIECTUL 3

Se dă pătratul ABCD de latură 6 cm. Punctele $M, N \in (DC)$ astfel încât $[DM] \equiv [MN] \equiv [NC]$, $P \in (AD)$ și $Q \in (BC)$ astfel încât $PD = BQ = \frac{1}{3} AB$ și $NQ \cap PM = \{E\}$.

a) Aflați aria patrulaterului MNQP;

b) Aflați valoarea raportului $\frac{EN}{NQ}$;

c) Calculați distanța de la punctul E la dreapta AB.

Prof. Mazilu Marin, Rm. Vâlcea

SUBIECTUL 4

Se consideră paralelogramul ABCD cu AB = a, BC = b și $m(\angle BAD) = 75^0$. Fie punctul $P \in (CD)$ astfel încât $m(\angle PAB) = 30^0$ și semidreapta [PB este bisectoarea unghiului APC.

a) Calculaţi perimetrul patrulaterului ABCP;

b) Calculaţi aria patrulaterului ABCP.

Prof. Radu Gheorghe, Rm. Vâlcea

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte.
Toate subiectele sunt obligatorii.

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VÂLCEA

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 15.02.2015
CLASA A VIII-A

SUBIECTUL I

a) Determinați numerele întregi x, y, z care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $x \cdot y \cdot z = -500$;

ii) $x(3y - z) + y(3z - x) + z(3x - y) - (x + y - z)^2 = 7z^2$.

Gheorghe Radu, Rm. Vâlcea

b) Numerele reale nenule a și b verifică egalitatea $a^2 \cdot b^{-2} - 3 \cdot a^{-2} \cdot b^2 = 2$. Să se arate că a și b nu pot fi simultan numere raționale.

Maranda Linț și Dorin Linț, Deva, G.M.

SUBIECTUL II

Se consideră expresia $E(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1, x \in \boldsymbol{R}$.

a) Demonstrați că $\sqrt{E(x)} \in \boldsymbol{N}$, pentru orice $x \in \boldsymbol{N}$;

b) Arătați că $\sqrt{\sqrt{E(x^2)}} \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$, pentru orice $x \in \boldsymbol{Z}$.

Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

SUBIECTUL III

În triunghiul ABC avem $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $tg(\sphericalangle B) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $BC = 5\sqrt{6}$ cm.

a) Calculați aria triunghiului ABC;

b) Dacă $MA \perp (ABC)$ și $MA = 4\sqrt{6}$ cm, aflați distanța de la M la CD, unde $[CD]$ este mediană în ΔABC;

c) Dacă $AN \perp CD, N \in [CD]$ și $AN \cap BC = \{O\}$, demonstrați că $[BO] \equiv [OC]$.

Leon Genoiu, Rm. Vâlcea

SUBIECTUL IV

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ având muchia de lungime a se consideră punctele $M \in (BC)$ și $N \in (DD')$. Fie $\{P\} = AC \cap DM$ și $\{Q\} = NC \cap DC'$.

a) Dacă M și N sunt mijloacele muchiilor (BC), respectiv (DD'), calculați lungimea lui [MN].

b) Demonstrați că $PQ \parallel (ABC') \Leftrightarrow BM = ND'$.

Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.
Toate subiectele sunt obligatorii.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2015

CLASA a IX-a

Subiectul 1: a) Demonstrați identitatea

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{(x+y)^2}{a+b}=\frac{(bx-ay)^2}{ab(a+b)}.$$

b) Rezolvați ecuația

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}=\frac{(x+x^2)^2}{5}.$$

Subiectul 2: a)Arătați că pentru orice x real are loc inegalitatea

$$\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\le 1.$$

b) Rezolvați ecuația în mulțimea numerelor reale

$$\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]=\left[\frac{x}{2}\right].$$

Subiectul 3: a) Să se demonstreze identitatea Botez-Catalan

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$$

b) Fie p si q numere naturale astfel încât

$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$. Demonstrați că 1979 divide pe p.

Subiectul 4: Considerăm paralelogramul ABCD cu AB=a, BC=c și BD=b și fie $M\in(BC)$ astfel încât $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABD, I centrul cercului înscris în triunghiul BCD, iar punctele G, I și M sunt coliniare , arătați că $4a=2b+5c$.

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 15.02.2015
CLASA A X- A

SUBIECTUL I

Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $3\cdot 2^x + 2\cdot 3^x + 6^x = 6(x-1)^2$

prof. Florentina Dicu, prof. Adrian Bălăşel, Rm Vâlcea

SUBIECTUL II

Fie funcţia $f: R \to R$, astfel încât $(f\circ f)(x) = -x^3, \forall x \in R$

1) Arătaţi că funcţia f este inversabilă;

2) Precizaţi dacă există funcţii strict monotone cu proprietatea din enunţ. Justificaţi răspunsul.

(****)

SUBIECTUL III

Fie $z_1, z_2, z_3 \in C$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ şi $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

Demonstraţi că $|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = 2$.

prof. Nicolae Muşuroia

SUBIECTUL IV

În mulţimea numerelor reale, rezolvaţi ecuaţia: $\log_3\left(9x^2 + \sqrt{3}\right) = \dfrac{\sqrt{\sin^2 x + 1}}{3 - \cos^2 x}$

prof. Florentina Dicu, prof. Adrian Bălăşel, Rm Vâlcea

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.
Toate subiectele sunt obligatorii.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2015

CLASA a XI-a

Problema 1.

a) Să se arate că ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ nu are soluții în $M_2(\mathbb{C})$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n; n \in \mathbb{N}^*$.

Vasile Gorgotă

Problema 2.

Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + I_3) = \det(A + 2I_3)$. Să se arate că

$$2\det(A + I_3) + \det(A - I_3) + 6 = 3\det(A).$$

G.M. 6-7-8/2014

Problema 3.

Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$$(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n + 2) \leq 0, \forall n \geq 0.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

Vasile Gorgotă

Problema 4.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{2}$.

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că are limite laterale finite în orice punct din $\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția transformă mulțimi mărginite în mulțimi mărginite.

***

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VÂLCEA

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 15.02.2015
CLASA A XII-A

SUBIECTUL I

Să se calculeze $I=\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x^2+1}dx$.

Prof. Cătălin Bîrzescu, Rm. Vâlcea

SUBIECTUL II

Fie $(G,\cdot)$ un grup în care nu există elemente de ordinul 2. Să se arate că dacă $(xy)^2=(yx)^2$, pentru orice $x,y\in G$, atunci G este grup abelian.

G.M. nr.6-7-8/2013

SUBIECTUL III

Fie $M=\left\{A(x)\,\middle|\,A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}, x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

a) Să se arate că $(M,\cdot)$ este grup abelian.

b) Să se calculeze simetricul elementului $A(2015)$.

c) Să se calculeze $A^n(x), n\in\mathbf{N}^*$.

Prof. Cătălin Pană, Rm. Vâlcea

SUBIECTUL IV

Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(1-x)+f(1+x)=f(x), \forall x\in\mathbf{R}$. Să se arate că $\int_0^{2015} f(x)dx=\int_{2013}^{2014} f(x)dx$.

Prof. Cătălin Bîrzescu, Rm. Vâlcea

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte.
Toate subiectele sunt obligatorii.