



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

### Clasa a V-a

**Problema 1.** Fie  $x$  și  $y$  două numere naturale nenule astfel încât  $2015^x - 2013 = x + y$ .  
Verificați dacă  $y$  este pătrat perfect, știind că:

$$3x + 6x + 9x + \dots + 102x = 3570.$$

*Grațierea Popa, Slatina*

**Problema 2.** Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 2 și restul 100, iar diferența dintre cifra sutelor și cifra unităților numărului este egală cu 4. Aflați numărul.

*Mihai Ilie, Slatina*

**Problema 3.** Fie  $A$  un număr natural care nu se divide cu 5 și  $B$  câtul împărțirii lui  $A$  la 5. Notăm cu  $u(A)$  ultima cifră a lui  $A$ . Arătați că dacă  $u(A) < 5$  atunci  $B$  este număr par, iar dacă  $u(A) > 5$ , atunci  $B$  este număr impar.

*Gazeta Matematică nr. 10/2014*

**Problema 4.** Pe o farfurie pătrată, cu lungimea laturii de 25 cm, se așază biscuiți de formă dreptunghiulară, cu lungimea de 4 cm și lățimea de 2 cm, fără a depăși marginile farfuriei. Biscuiții vin în pachete de câte 15 bucăți.

a) Arătați că oricum am așeza biscuiții din 5 pachete, aceștia nu pot acoperi complet farfuria.

b) Arătați că dacă pe farfurie se pun biscuiții din 16 pachete, există cel puțin 4 biscuiți care se suprapun (nu neapărat complet).

*Marius Perianu, Slatina*

**NOTĂ.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore și 30 de minute.



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

### Clasa a VI-a

**Problema 1.** Determinați cifrele  $a, b, c, d$  știind că  $\overline{abcd} = 1,0ac$ .

*Gazeta Matematică nr. 9/2014*

**Problema 2.** Împărțind numărul natural nenul  $m$  pe rând la 7, 8 și 9 obținem resturile 1, 4, respectiv 7, iar împărțind numărul natural nenul  $n$  pe rând la 8 și 9 obținem resturile 5, respectiv 7.

Arătați că fracția  $\frac{m+20}{n+11}$  este divizibilă cu 72.

*Ion Neață, Slatina*

**Problema 3.** Arătați că numărul  $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2039}$  este divizibil cu 2015.

*Daniel Cojocaru, Slatina*

**Problema 4.** Se consideră punctele coliniare  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{2015}$  în această ordine, astfel încât  $M_1M_2 = 2$  cm,  $M_2M_3 = 2M_1M_2$ ,  $M_3M_4 = 2M_2M_3$ ,  $\dots$ ,  $M_{2014}M_{2015} = 2M_{2013}M_{2014}$ .

a) Calculați lungimea segmentului  $[M_1M_{200}]$ .

b) Comparați lungimile segmentelor  $[M_1M_{200}]$  și  $[M_{200}M_{300}]$ .

c) Demonstrați că pentru orice numere naturale  $a, b, c, d$ , cu  $1 \leq a < b \leq c < d \leq 2015$ , segmentele  $[M_aM_b]$  și  $[M_cM_d]$  au lungimi diferite.

*Dorin Popa, Slatina*

**NOTĂ.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore și 30 de minute.



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

## Clasa a VII-a

**Problema 1.** Se consideră pătratul  $ABCD$  în care se notează cu  $M$  mijlocul laturii  $[AB]$ . Fie  $E$  punctul de intersecție al dreptelor  $BD$  și  $CM$ . Arătați că  $DM \perp AE$ .

*Grațierea Popa, Slatina*

**Problema 2.** a) Arătați că oricare ar fi numerele reale  $a, b, c$  are loc relația  $|a+b|+|a+c| \geq |b-c|$ .  
b) Demonstrați că pentru orice număr real  $x$  are loc inegalitatea:

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|+\dots+|x+2014| \geq 1007^2.$$

*Gazeta Matematică nr. 11/2014*

**Problema 3.** Se consideră numărul natural  $n = \overline{abcd}$  și  $x = \sqrt{\overline{ab, (cd) + bc, (da) + cd, (ab) + da, (bc)}}$ , unde  $a, b, c, d$  sunt cifre nenule.

- a) Știind că  $x$  este rațional, determinați cea mai mare valoare posibilă pe care o poate lua  $n$ .  
b) Arătați că dacă  $x$  este număr natural, atunci  $n$  are cel puțin două cifre egale.

*Marius Perianu, Slatina*

**Problema 4.** Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $D, E, F \in (BC)$  astfel încât  $[AD]$  este bisectoarea unghiului  $BAC$ ,  $[AE]$  este bisectoarea unghiului  $BAD$  și  $[AF]$  este bisectoarea unghiului  $CAD$ . Arătați că:

$$AE \cdot \left( \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right) = AF \cdot \left( \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \right).$$

*Ion Neață, Slatina*

**NOTĂ.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

**Clasa a VIII-a****Problema 1.** a) Demonstrați că, pentru orice numere reale  $x, y, z, t$  are loc egalitatea:

$$(xz + yt)^2 + (xt - yz)^2 = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$$

b) Numerele raționale pozitive  $a, b, c, d$  verifică simultan egalitățile:

$$a^2 + b^2 = 9, \quad c^2 + d^2 = 16, \quad ac + bd = 12.$$

Arătați că numărul  $\frac{a\sqrt{3} + b}{c\sqrt{3} + d}$  este rațional.*Ion Neață, Slatina***Problema 2.** Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, ecuația:

$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + 2 = 0.$$

*Gazeta Matematică nr. 9/2014***Problema 3.** Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  care verifică egalitatea

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{a - 2014} + \sqrt{b + 2014} - 2 - \frac{a + b}{2} = 0.$$

*Iuliana Trașcă, Scornicești***Problema 4.** Se consideră rombul  $ABCD$  în care  $AB = 6$  cm și  $m(\sphericalangle BAD) = 60^\circ$ . De aceeași parte a planului  $(ABC)$  se ridică perpendicularele  $AM$  și  $CQ$  pe planul  $(ABC)$  astfel încât  $AM = 9$  cm și  $CQ = 3$  cm.a) Demonstrați că planele  $(MBD)$  și  $(QBD)$  sunt perpendiculare.b) Calculați distanța dintre dreptele  $BD$  și  $MQ$ .c) Determinați cosinusul unghiului format de planele  $(MBQ)$  și  $(ABC)$ .*Dorin Popa, Slatina***NOTĂ.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.