OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a V-a

1. Fie $a = 2015 + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 2014)$ şi $b = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + 2015$.

a) Arătaţi că a şi b sunt pătrate perfecte .

b) Arătaţi că $2015 + a < 4b$

Prof. Gobej Adrian, Curtea de Argeş

2. Determinaţi numerele naturale prime a, b şi c pentru care are loc egalitatea $2a + 5b + 6c = 50$.

GM 5/2014

3. Determinaţi mulţimile X şi Y ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

(i) $X \cup Y \subset \{1; 2; 3; 4\}$;

(ii) $X \cap Y \supset \{1; 2\}$;

(iii) $X \setminus Y \subset \{1; 2; 4\}$;

(iv) $\{1; 2; 3\} \not\subset Y$;

(v) X are mai puţine elemente decât Y.

****

4. Pentru o excursie şcolară s-au închiriat autocare la preţul de 5 lei pe kilometru, iar lungimea traseului a fost stabilită la 600 km. Din diferite motive, 6 elevi s-au retras din excursie, iar traseul efectiv a fost mai scurt, în aşa fel încât preţul transportului pe elev nu s-a modificat. Ştiind că s-au plătit 2700 lei pentru autocare, aflaţi lungimea efectivă a traseului parcurs şi numărul de elevi înscrişi iniţial.

Prof. Constantin Bozdog, Reghin

NOTĂ: Timp de lucru: 2 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a VI-a

1. Aflaţi numărul natural $\overline{xy}$ dacă $\dfrac{\overline{xyxyxy}}{\overline{yxyxyx}} = \dfrac{4}{7}$.

GM 5/2014

2. Arătaţi că numărul $N = 1+7+7^2+\ldots\ldots+7^{2015}$ este divizibil cu 200.

prelucrare GM 2014

3. Se consideră segmentul AB şi O mijlocul său. Pe o dreaptă **d** ce trece prin O (diferită de AB) se consideră de o parte şi de alta a lui O punctele M şi N (M, N $\in$ *d*) astfel încât unghiurile $\sphericalangle$MBO şi $\sphericalangle$NAO sunt congruente. Arătaţi că [MA] $\equiv$ [NB].

* * *

4. Se consideră două unghiuri adiacente şi suplementare. Bisectoarea celui mai mare dintre ele formează cu o latură a celuilalt un unghi de $110°$. Aflaţi măsurile celor două unghiuri.

* * *

NOTĂ: Timp de lucru: 2 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14.02.2015
Clasa a VII-a

1. a) Arătaţi că $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}}>\sqrt{2015}$.

b) Fie $x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+...+\frac{\sqrt{2015}-\sqrt{2014}}{\sqrt{2015\cdot 2014}}$. Determinaţi $\left[x\sqrt{2015}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

* * *

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2+b^2=c^2$ şi a ≤ b. Arătaţi că:

a) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\notin\mathbb{Q}$;

b) dacă $a\not\vdots\, 5, b\not\vdots\, 5$ şi cmmdc$(a,b)=1$, atunci $\sqrt{a^2b^2+c^2}\in\mathbb{N}$.

profesor Laurenţiu Ţibrea

3. În paralelogramul $ABCD$, considerăm $AC\cap BD=\{O\}$, $M,N\in(AC)$ astfel încât A-M-N şi $(AM)\equiv(NC)$. Dacă $DM\cap BC=\{L\}$ şi $BN\cap CD=\{T\}$, arătaţi că:

a) $(DN)\equiv(BM)$;

b) L, O, T sunt coliniare.

* * *

4. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ şi $m(\sphericalangle C)=30^\circ$, considerăm bisectoarea $[BE$, $E\in[AC]$ şi un punct D pe $[BC]$ astfel încât $BC=3\cdot BD$. Dacă $\{O\}=BE\cap AD$ şi F este mijlocul lui $[AB]$, arătaţi că F, O şi C sunt coliniare.

GM 11/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14.02.2015
Clasa a VIII-a

1. Fie ecuația: 7(1-x):m - 2x = 2(1-x), cu m parametru real nenul.

a) Să se rezolve ecuația.

b) Să se determine m număr întreg pentru care partea întreagă a soluției ecuației este egală cu 1.

2. Fie x, y, z numere reale strict pozitive. Să se arate că:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}\geq\frac{4}{x+2y}$

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{8}{3}\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right)$

3. Pe planul pătratului ABCD se ridică de aceeași parte perpendicularele AM și CN.

a) Să se arate că dreptele MN și BD sunt perpendiculare.

b) Dacă AB=3, AM=4, CN=4-$\sqrt{7}$, să se calculeze distanțele de la M la BN și de la M la planul (BCN).

4. Fie piramida patrulateră regulată VABCD, $\{O\}=AC\cap BD$ și P, Q $\in(VO)$. Dacă $\{E\}=AP\cap CV$, $\{F\}=CP\cap AV$, $\{S\}=BQ\cap DV$ și $\{T\}=DQ\cap BV$, arătați că măsura unghiului dintre dreptele EF și ST nu depinde de alegerea punctelor P și Q pe segmentul VO.

GM 11/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14.02.2015
Clasa a VIII-a

1. Fie ecuaţia: 7(1-x):m - 2x = 2(1-x), cu m parametru real nenul.

a) Să se rezolve ecuaţia.

b) Să se determine m număr întreg pentru care partea întreagă a soluţiei ecuaţiei este egală cu 1.

2. Fie x, y, z numere reale strict pozitive. Să se arate că:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}\geq\frac{4}{x+2y}$

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{8}{3}\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right)$

3. Pe planul pătratului ABCD se ridică de aceeaşi parte perpendicularele AM şi CN.

a) Să se arate că dreptele MN şi BD sunt perpendiculare.

b) Dacă AB=3, AM=4, CN=4-$\sqrt{7}$, să se calculeze distanţele de la M la BN şi de la M la planul (BCN).

4. Fie piramida patrulateră regulată VABCD, $\{O\}=AC\cap BD$ şi P, Q $\in(VO)$. Dacă $\{E\}=AP\cap CV$, $\{F\}=CP\cap AV$, $\{S\}=BQ\cap DV$ şi $\{T\}=DQ\cap BV$, arătaţi că măsura unghiului dintre dreptele EF şi ST nu depinde de alegerea punctelor P şi Q pe segmentul VO.

GM 11/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $[2x-5]=\sqrt{2}\cdot[3x-7]$.

***

2. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $x+y+z=2015$, demonstraţi că
$$\sqrt{2015x+yz}+\sqrt{2015y+zx}+\sqrt{2015z+xy}\le 4030.$$

***

3. Demonstraţi că în orice triunghi ABC, avem relaţia $\overline{OH}=\overline{OC}+\overline{OB}+\overline{OA}$, unde notăm centrul cercului circumscris cu O şi ortocentrul cu H.

***

4. Într-un triunghi ABC, fie D, E şi respectiv F punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile BC, CA, AB. Arătaţi că dacă $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DC}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

S.GM 3/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în **R** ecuaţia: $\frac{1}{2^x+3^x}+\frac{1}{3^x+4^x}+\frac{1}{6^x+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{6^x}\right)$.

Marian Cucoaneş, GM 2/2014

2. Să se arate că dacă $x=\log_2 6$ şi $y=\log_3 6$, atunci au loc relaţiile:

a) $x+y=xy$, $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$.

b) $x^2+y^2>8{,}81$.

Traian Sfetcu

3. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$. Să se rezolve ecuaţiile $f(x)=1$, $f(x)=3$.

Să se discute în funcţie de valorile lui $\alpha\in R$, numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x)=\alpha$.

Traian Sfetcu

4. Fie $z_1=x-y\varepsilon,\ z_2=y-z\varepsilon,\ z_3=z-x\varepsilon$, numere complexe cu $|z_1|=1, |z_2|=2, |z_3|=3$ unde x, y, z sunt reale, diferite şi ε este o rădăcină de ordin trei a unităţii diferită de 1. ($\varepsilon^3=1,\ \varepsilon^2+\varepsilon+1=0$).

a) Să se arate că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi ehilateral.

b) Dacă $xy+yz+zx=0$, să se calculeze aria triunghiului.

Traian Sfetcu

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XI –a

1) Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

a) Demonstraţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

b) Considerând cunoscut faptul că $\lim_{n\to\infty} x_n = \ln 2$, calculaţi $\lim_{n\to\infty} n^2\left(e^{x_{n+1}} - e^{x_n}\right)$.

***

2) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$ pentru $a_n = \left\{\sqrt{n^2+5n+9}\right\}$, $n \geq 1$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

S, GM 12/2014

3) Fie $A \in M_n(\mathbb{R}), n \geq 2,$ astfel încât $A^3 = I_n$ şi matricea $I_n - A$ este inversabilă.

a) Demonstraţi că matricea $I_n + A$ este inversabilă şi determinaţi inversa ei în funcţie de A.

b) Calculaţi $\det(I_n + A)$.

***

4) Fie A o matrice pătratică cu elemente întregi având determinantul egal cu 2. Să se demonstreze că cel puţin un complement algebric al matricei A este număr întreg impar.

GM 9/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN VRANCEA

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XII-a

1. Fie funcția $f: Z_9 \to Z_9$, $f(x) = x^2$. Să se determine submulțimile nevide A ale mulțimii Z_9 cu proprietatea $f(A) = A$.

GM 9/2014

2. Pe R se consideră legea de compoziție $x * y = 2015xy - 2014x - 2014y + 2014$, $x, y \in R$.

a) Să se arate că $*$ este asociativă;

b) Să se afle $\alpha \in R$ astfel încât $x * x \geq \alpha$, pentru orice $x \in R$;

c) Să se calculeze $\frac{1}{2015} * \frac{2}{2015} * \ldots * \frac{2015}{2015}$.

3. Fie $f: R \to R$ o funcție care admite o primitivă neinjectivă. Să se arate că există $a, b \in R$ $a \neq b$ astfel încât $f(a) + 2f(b) = 0$.

4. Să se calculeze $\int \frac{\sin x}{e^x + \sin x + \cos x} dx$, $x \in (0, +\infty)$.

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală - 14.02.2015

Filiera tehnologică, profil servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI-A

1. Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) Să se demonstreze că $\det(A - xI_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$, pentru orice număr real x.

b) Dacă $A^2 = O_2$, să se demonstreze că $a + d = 0$.

c) Știind că $A^2 = O_2$, să se calculeze $\det(A + 2015I_2)$.

2. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{(x^2 - 4)^3}$; b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4^{x - \frac{5}{2}} - 2}{\sin(9 - 3x)}$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(2e^{3x} + 2014)}{\ln(3e^{2x} + 2015)}$.

3. **a)** Considerăm funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{x-3}\right)$. Determinați ecuațiile asimptotelor verticale la graficul funcției.

b) Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + ax + b$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției admite asimptotă orizontală la $+\infty$ de ecuație $y = 2$.

4. Se consideră mulțimea M formată din toate matricele cu 2 linii și 2 coloane și care au toate elementele din mulțimea $\{0, 1, 2\}$, iar elementul de la intersecția dintre linia 1 și coloana 1 este diferit de 0.

a) Să se gasească o matrice $A \in M$ pentru care $\det(A) = 0$ și o matrice $B \in M$ pentru care $\det(B) \neq 0$.

b) Să se arate că , dacă $X \in M$, atunci $-4 \leq \det(X) \leq 4$.

c) Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală - 14.02.2015

Filiera tehnologică, profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A XII-A

1) Pe mulţimea $G=(-2,2)$ se consideră legea de compoziţie: $x\circ y=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}$.

a) Să se arate că $(G,\circ)$ este grup comutativ.

b) Să se arate că funcţia $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2+x}{2-x}$ este un izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ şi $(\mathbb{R},+)$.

2) **a)** Se consideră funcţiile $f,F:\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{3-2x}$, $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{3-2x}$.

Să se determine numerele reale a,b,c ştiind că funcţia F este o primitivă a funcţiei f pe $\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)$.

b) Să se determine funcţia $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, derivabilă pe $(0,\infty)$ care verifică relaţiile

i) $xf'(x)=\left(2x^2+1\right)f(x)$, $\forall x\in(0,\infty)$; **ii)** $f(1)=e^3$.

3) Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$. Fie, de asemenea, $G=(3,\infty)$.

a) Demonstraţi că $\circ$ este asociativă şi comutativă;

b) Determinaţi $E\in\mathbb{R}$ astfel încât $E\circ x=x\circ E=E$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

c) Rezolvaţi în G ecuaţia $x\circ x\circ x=x$;

d) Studiaţi dacă $H=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $\circ$ (Justificare!).

4) **a)** Să se determine funcţia derivabilă $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ al cărei grafic trece prin punctul $B(1,1)$ şi pentru care tangenta la grafic în orice punct $M(b,G(b))$ are panta $g(b)=2b+1$, $\forall b\in\mathbb{R}$.

b) Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\min\limits_{t\le x}\left(t^2-t+1\right), & x\le\dfrac{1}{2}\\ \max\limits_{t\ge x}\left(-t^2+t+1\right), & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

i) Demonstraţi că $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & \forall x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\\ -x^2+x+1, & \forall x\in\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)\end{cases}$;

ii) Studiaţi dacă f admite primitive pe $\mathbb{R}$ (folosind, eventual, rezultatul de la punctul i)).

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.