MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015
CLASA a V-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1 Determinați numerele naturale care, adunate cu suma propriilor cifre, dau rezultatul 2015.

Autor: Prof.Mihaela Berindeanu

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă $x=\overline{abc} \Rightarrow \overline{abc}+a+b+c \le 999+9+9+9$ Neacceptat Numărul căutat are 4 cifre	1p
Dacă $x=\overline{abcd} \Rightarrow \overline{abcd}+a+b+c+d=2015 \Rightarrow 1001a+101b+11c+2d=2015$	1p
$a>3$ Neacceptat pentru că $\overline{abcd}+a+b+c+d>2015$	1p
$a\in\{1,2\}$ $a=2 \Rightarrow 2002+101b+11c+2d=2015$ $101b+11c+2d=13 \Rightarrow b=0$ $11c+2d=13$ cu soluție unică $c=d=1$ Numărul căutat este 2011 și $2011+4=2015$	2p
$a=1 \Rightarrow 1001+101b+11c+2d=2015$ $101b+11c+2d=1014$ Pentru $b<9$ nu există soluție $b=9 \Rightarrow 11c+2d=105 \Rightarrow \begin{cases} c=9 \\ d=3 \end{cases}$ Numărul căutat este 1993 și $1993+22=2015$ Numerele care îndeplinesc cerințele problemei sunt deci 2011 și 1993.	2p

Enunţ subiect 2 Se dau mulţimile de numere naturale $A=\{x-1;2x-3;3x+1;4x-1\}$ şi $B=\{4x-2,3x+2,3x-6,2x-4\}$. Determinaţi x pentru care $A=B$.

Autor: GM-B 11/2014

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Pentru ca mulţimile să fie egale trebuie să aibă aceleaşi elemente	1p
Se arată că singura variantă posibilă este $2x-3=3x-6$ ($2x-3$ este impar, prin urmare nu poate fi egal cu $2x-4$ sau $4x-2$ care sunt numere pare. $2x-3$ nu poate fi egal cu $3x+2$, acesta fiind mai mare)	3p
Din $2x-3=3x-6$ obţinem $x=3$	2p
Pentru $x=3$ obţinem $A=\{3,2,10,11\}=B$	1p

Soluţie alternativă: suma elementelor mulţimii A= suma elementelor mulţimii B........

Enunţ subiect 3: În figura de mai jos, sunt n pătrate, în fiecare pătrat fiind scrise numai puteri ale lui 2, după cum se observă:

1	2^1
2^2	2^3

2^4	2^5
2^6	2^7

2^8	2^9
2^{10}	2^{11}

....

a) Arătaţi că suma numerelor din oricare dintre cele n pătrate este multiplu de 5.
b) Demonstraţi că produsul numerelor din oricare dintre cele n pătrate este pătrat perfect.
c) Aflaţi restul împărţirii la 1024 a sumei tuturor numerelor aflate în primele 2015 pătrate.

Autor: Prof.Ion Cicu, Prof. Cristian Olteanu, Prof.Traian Preda

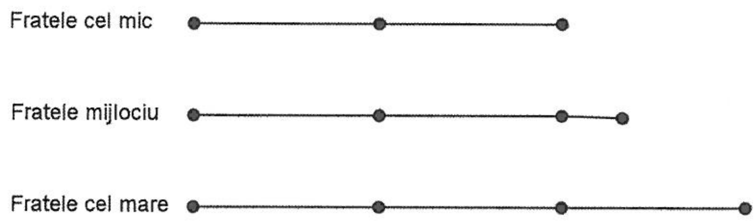
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a)În fiecare pătrat avem numerele $2^n,2^{n+1},2^{n+2},2^{n+3}$ şi atunci $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}+2^{n+3}=2^n\left(1+2+2^2+2^3\right)=2^n\cdot 15$ care este multiplu de 5. *Dacă face verificare pentru primele 3 pătrate se dă 1 p, care nu se cumulează cu cele 2p anterioare.*	2p
b)Avem $2^n\cdot 2^{n+1}\cdot 2^{n+2}\cdot 2^{n+3}=2^{4n+6}=\left(2^{2n+3}\right)^2$, adică este pătrat perfect. *Dacă face verificare pentru primele 3 pătrate se dă 1p, care nu se cumulează cu cele 2p anterioare*	2p
c) $1024=2^{10}$ şi $1+2+2^2+...+2^9<2^{10}$	1p
$1+2+2^2+...+2^9+2^{10}+...+2^{8059}=(2^{10}-1)+2^{10}\left(1+...+2^{8049}\right)$	1p
Restul împărţirii este $2^{10}-1=1023$	1p

Enunţ subiect 4 : Trei fraţi vor să-şi cumpere împreună, din economiile lor, o tabletă în valoare de 2015 lei. Fratele cel mai mare contribuie cu o sumă de trei ori mai mare decât jumătatea sumei cu care contribuie cel mai mic dintre fraţi, iar fratele mijlociu contribuie cu o sumă cuprinsă între sumele celorlalţi doi fraţi. Fiecare dintre sumele cu care contribuie cei trei fraţi sunt exprimate prin numere naturale de lei.

a) Aflaţi cea mai mică sumă de lei cu care contribuie fratele mijlociu.

b) Aflaţi numărul soluţiilor problemei şi cea mai mare sumă cu care contribuie fratele mijlociu.

Autor: Prof. Victor Nicolae, Prof. Simion Petre



Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a)Desenul şi aflarea unui segment $2015:7=287$ rest 6.	2p
Aşadar fratele mic contribuie cu $287\cdot 2=574$ lei, fratele mijlociu contribuie cu $574+6=580$ lei şi este cea mai mică sumă cu care contribuie cel mijlociu, iar fratele cel mai mare contribuie cu $287\cdot 3=861$ lei.	1p
b)Valoarea cu care suma celui mijlociu depăşeşte suma celui mai mic are forma 6+7k şi jumătatea sumei celui mai mic are forma 287-k. Obţinem inecuaţia $6+7k<287-k$	2p
Rezolvarea inecuaţiei $k\in\{0;1;2;3;...;35\}$	1p
Finalizare 36 de soluţii, Cea mai mare sumă cu care participă fratele mijlociu este $(287-35)\cdot 2+6+7\cdot 35=755$ lei.	1p

Soluţie alternativă cu ajutorul ecuaţiilor şi al inecuaţiilor.