OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015
CLASA a VI-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1 Determinaţi numerele naturale $a,\ b,\ a<b$ şi $c\in\mathbb{N}$ astfel încât
$\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}=\frac{c+3}{c+1}$.
Autor: GM-B 1/2014

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$a^2+a=a(a+1)$. Un produs de două numere consecutive este multiplu de 2, prin urmare $\frac{a^2+a}{2}$ este număr natural. Analog, $\frac{b^2+b}{2}$ este număr natural. Deducem că $\frac{c+3}{c+1}$ este număr natural.	3p
Dar $\frac{c+3}{c+1}=1+\frac{2}{c+1}$ şi atunci $c+1\in\{1,2\}$. Obţinem $c=0$ sau $c=1$	2p
Pentru $c=0$ avem $\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}=3$, de unde rezultă $a=0, b=2$	1p
Pentru $c=1$ avem $\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}=2$, nu îndeplineşte condiţiile.	1p

Enunţ subiect 2 Se consideră următoarele numere naturale:

$a = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot.....\cdot27\cdot29\cdot31$ şi $b = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot.....\cdot27\cdot29$.

a) Demonstraţi că numărul a este divizibil cu 2015.
b) Aflaţi cel mai mare număr natural n cu proprietatea că numărul a+b este divizibil cu 10^n.
c) Să se afle câţi divizori care sunt pătrate perfecte are numărul a.
Autor :Prof. Traian Preda

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $5\cdot13\cdot31=2015 \Rightarrow 2015 \mid a$.	1p
b) $a+b= 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot.....\cdot27\cdot29\cdot32 = 5^4\cdot2^5\cdot x$ cu $(x,10)=1$	2p
$\Rightarrow 10^4 \mid a+b$, 10^5 nu divide $a+b \Rightarrow n=4$	1p
c) $a= 3^8\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot.....\cdot23\cdot29\cdot31$ descompunerea lui a în factori primi	1p
orice divizor pătrat perfect al lui a este de forma $3^{2i}\cdot5^{2j}\cdot7^{2k}$ unde $i\in\{0,1,2,3,4\}$;$j\in\{0,1,2\}$ $k\in\{0,1\}$	1p
vom avea $5\cdot3\cdot2=30$ de pătrate perfecte.	1p

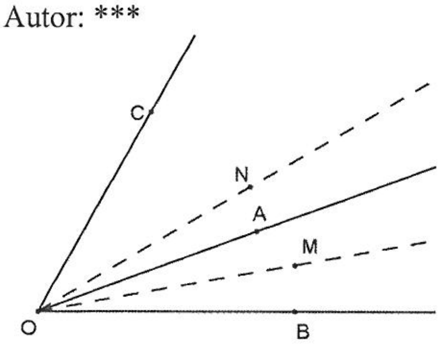
Enunţ subiect 3: Se consideră mulţimea $A = \{\overline{ab} \mid \overline{ab}$ divizibil cu 5 $\}$. Pentru o submulţime $B\subseteq A$ notăm cu m_B media aritmetică a elementelor sale. Să se determine submulţimile B de cardinal maxim ştiind că $m_B \in A$

Autor :Prof. Traian Preda

Detalii rezolvare	Barem asociat
$A=\{5\cdot2,5\cdot3,...5\cdot19\}\Rightarrow m_A =\dfrac{5\cdot189}{18} \notin A \Rightarrow$ card $B \le 17$. Arătăm card B=17.	2p
$B=A\setminus\{5\cdot x\}$, $x\in\{2,3,4...,19\} \Rightarrow m_B =\dfrac{5\cdot(189-x)}{17} \in A \Leftrightarrow 17 \mid 189-x \Leftrightarrow 17 \mid 19-x$ $\Leftrightarrow x\in\{2,19\}$	3p
$\Rightarrow B=A\setminus\{10\}$ sau $B=A\setminus\{95\}$.	2p

Enunţ subiect 4: Fie unghiurile complementare $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOC$. Ştiind că măsura unghiului determinat de bisectoarele lor este egală cu 25^0, calculaţi măsurile celor două unghiuri.

Autor: ***



Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă unghiurile sunt adiacente, atunci unghiul dintre bisectoare are măsura de 45^0 . Prin urmare unghiurile nu pot fi complementare	3p
Presupunem $m(\measuredangle BOA)<m(\measuredangle BOC)$. Notând $m(\measuredangle BOA)=2a$ şi $m(\measuredangle BOC)=2b$ avem $m(\measuredangle MON)=b-a$	2p
Avem $a+b=45^0$ şi $b-a=25^0$, de unde $b=35^0$ şi $a=10^0$ Rezultă $m(\measuredangle BOA)=20^0$ $m(\measuredangle BOC)=70^0$	2p