PROBLEME REZOLVATE DIN REVISTA „AXIOMA”
Crăciun Gheorghe

Clasa a V-a

1. *Determinaţi numerele naturale a, b, c ştiind că:*

$$6\cdot(3^{a}+\overline{bb}_{10})+2^{c}=493$$

Nicolae Angelescu

Rezolvare

Suma 493 fiind număr impar şi primul termen par, rezultă că termenul 2^c este impar, deci c = 0 căci 2^0 = 1.3^a + 11b = 492 : 6 = 82. Dăm lui a valorile 1, 2, 3, 4, 5 şi calculăm b corespunzător. Soluţia unică: a = 3, b = 5, c = 0.

2. *Fie a şi b două numere naturale nenule. Ştiind că:*

$\frac{2}{3}<\frac{3}{a}<\frac{7}{5}<\frac{3}{b}<\frac{6a}{2a+3b}$, *calculaţi a + b.*

Nicolae Angelescu

Rezolvare

a, b $\in$ **N***; $\frac{2}{3}<\frac{3}{a}<\frac{7}{5}<\frac{3}{b}<\frac{6a}{2a+3b}$; $\frac{10}{15}<\frac{45}{15a}<\frac{21}{15}$;

$10<\frac{45}{a}<21\Rightarrow a\in\{3,4\}$. $\frac{7}{5}<\frac{3}{b}$; 7b < 15 $\Rightarrow$ b $\in$ {1, 2}.

Din cele patru cazuri, convine doar a = 4 şi b = 2, deci a + b = 6.

3. *Să se demonstreze că numărul a = 1 + 5 + 9 + 13 + … + 97 este pătrat perfect.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Rezolvare Vom scrie numărul a sub forma

$$a = 4\cdot 0 + 1 + 4\cdot 1 + 1 + 4\cdot 2 + 1 + 4\cdot 3 + 1 + \ldots + 4\cdot 24\cdot 1$$

$$a = 4\cdot 0 + 4\cdot 1 + 4\cdot 2 + 4\cdot 3 + \ldots + 4\cdot 24 + \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{25\ ori}$$

de unde a = 4· (1 + 2 + 3 + … + 24) + 15.Prin urmare a = $4\cdot\frac{24\cdot 25}{2}+25$, iar în urma simplificării se obţine a = 25· (2· 24 + 1) şi în urma efectuării calculelor se obţine a = 25· 49 adică a = $5^2\cdot 7^2$, de unde a = 35^2.

4. *Să se compare 31^{17} cu 3^{86}*

Gheorghe Crăciun, Ploieşti

Rezolvare $31^{17}<32^{17}=(2^5)^{17}=2^{85}<3^{85}<3^{86}$

5. *Să se afle cel mai mare număr natural avand toate cifrele diferite între ele și al căror produs este 720.*

Gh.Crăciun, Ploiești

Rezolvare Dintre două numere naturale neavand același număr de cifre, mai mare este cel care are mai multe cifre.Numărul căutat este 654321 deoarece $720=1\cdot 2^4\cdot 3^2\cdot 5$

CLASA a VI-a

1. *Scrieţi numărul 221 ca produs de numere prime şi precizaţi numărul divizorilor săi. Dacă $\overline{ab}$ este cel mai mare număr prim din descompunerea obţinută, determinaţi restul împărţirii numărului $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot\overline{ab}$ la 693.*

Mihail Focşeneanu, Ploieşti

Rezolvare

$221 = 13\cdot17$, are 4 divizori; $\overline{ab}=17$, $693 = 3^2\cdot7\cdot11$.

Produsul $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot17$ are factorii 3^2, 7, 11 deci se divide cu 693; restul este 0

2. *Să se afle restul împărțirii lui $A=4^1+4^2+4^3+4^4+\ldots+4^{2012}$ la 84.*

Gheorghe Crăciun, Ploieşti

Rezolvare

Observam ca $A=4+4^2+(4^3+4^4+4^5)+\ldots+(4^{2010}+4^{2011}+4^{2012})$.

Orice sumă de forma $4^k+4^{k+1}+4^{k+2}, k>0$ este evident divizibilă cu 84.

Restul va fi 20.

3. *Preţul unui produs se măreşte cu 10% apoi se ieftineşte cu 39% astfel încât preţul final al produsului este 2013 lei. Să se determine preţul iniţial al produsului.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Rezolvare

Dacă notăm cu x preţul iniţial al produsului, după majorarea preţului acesta va fi $x+\frac{10}{100}x=\frac{11}{10}x$.

După ieftinire preţul va fi $\frac{11}{10}x-\frac{39}{100}\cdot\frac{11}{10}x=\frac{11}{10}x\cdot\left(1-\frac{39}{100}\right)=\frac{11}{10}x\cdot\frac{61}{100}$ şi cum preţul final este 2013 se obţine ecuaţia

$$\frac{11}{10}x\cdot\frac{61}{100}=2013 \text{ de unde } x = 3000 \text{ lei.}$$

4. *Dacă $2^{x+3}-2^{x+2}-2^{x+1}-2^x=8^{451}\cdot4^{330}$ să se arate că numărul $a=7^x\ 3^{x-1}$ nu este pătrat perfect.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Rezolvare

Relaţia dată se scrie sub forma

$2^x\cdot(2^3-2^2-2-1)=(2^3)^{451}\cdot(2^2)^{330}$, de unde

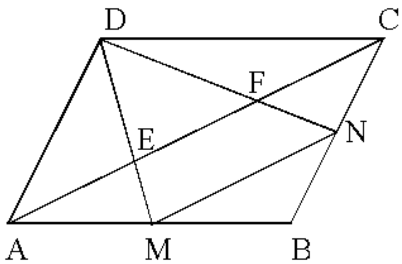
$2^x=2^{1353}\cdot2^{660}$ sau încă $2^x=2^{2013}$ şi prin urmare x = 2013, iar a se scrie sub forma $a=7^{2013}+3^{2012}$ .Dar $U(7^{2013})=U(7^{4\cdot503+1})=7$, iar $U(3^{2012})=U(3^{4\cdot503})=1$, de unde U(a) = 8.

Cum nici un pătrat perfect nu se termină în 8 rezultă că a nu este pătrat perfect.

CLASA a VII-a

1. *Se consideră patrulaterul ABCD în care AB || CD iar E, F $\in$ (AC) astfel încât [AE] $\equiv$ [EF] $\equiv$ [FC]. Dacă {M} = DE $\cap$ AB, {N} = DF $\cap$ BC iar MN || AC, să se demonstreze că ABCD este paralelogram.*

E. Blăjuţ, Bacău



Rezolvare

În Δ BAC, avem MN || AC, prin urmare (T.F.A) Δ BMN ~ Δ BAC $\Rightarrow$ $\frac{MN}{AC}=\frac{BM}{BA}$ şi ţinând seama că AC = 3AE se obţine: $\frac{MN}{3AE}=\frac{BM}{BA}$ **(1)** .

Pe de altă parte din AM || DC vom avea că Δ AEM ~ Δ CED (T.F.A) şi deci $\frac{AM}{DC}=\frac{EM}{EC}=\frac{AE}{EC}$ **(*)** şi ţinând seama că EC = 2AE, din relaţia **(*)** se găseşte că AM = DC/2, respectiv $\frac{EM}{ED}=\frac{1}{2}$ sau încă (folosind proporţii derivate) $\frac{DM}{ED}=\frac{3}{2}$.În Δ DMN, EF || MN, aşadar Δ DEF ~ Δ DMN (T.F.A) şi deci $\frac{DE}{DM}=\frac{EF}{MN}$, de unde $\frac{2}{3}=\frac{AE}{MN}$ (am ţinut seama că [EF] $\equiv$ [AE]) **(2)**.

Din **(1)** şi **(2)** se obţine $\frac{BM}{BA}=\frac{1}{2}$, ceea ce demonstrează că M este mijlocul segmentului [AB], adică AM = AB/2 şi cum AM = DC/2 se obţine că [AB] $\equiv$ [DC].Prin urmare [AB] $\equiv$ [DC] şi AB || DC , adică ABCD este un paralelogram.

2. *Rezolvaţi ecuaţia $(x – a)^n + (a – x)^n = 0$ unde $n \in$ **N** şi $a \in$ **Z**.*

Petre Năchilă

Rezolvare

Dacă n = 0, ecuaţia nu are soluţie; S = $\emptyset$.

Dacă n este par nenul, atunci $2\cdot(x – a)^n = 0$, deci S = {a}.

Dacă n este impar, atunci $(x – a)^n – (x – a)^n = 0$ şi deci S = **R**

CLASA a VIII-a

1. *Fie a, b>0 astfel incât a + b = 1. Arătaţi că* $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

***

Rezolvare: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 = a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4 = a^2+b^2+ \quad +\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+4$

$a^2+b^2=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right] \geq \frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}$ Cum $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ avem

$$\frac{1}{a^2b^2}=\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^4 \geq \left(\frac{1}{\frac{a+b}{2}}\right)^4=16$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=(a^2+b^2)\left(1+\frac{1}{a^2b^2}\right)+4\geq\frac{1}{2}(1+16)+4=\frac{25}{2}$$

2. *Dacă a, b, c∈R₊ astfel incât a + b + c = 1 atunci* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$. *In ce caz are loc egalitatea ?*

***

Rezolvare **:** Deoarece a + b + c = 1 avem: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)$ =1 + 1 + 1 + $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geq 9$ deoarece $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$. Egalitatea se obţine pentru a = b = c = $\frac{1}{3}$

3. *Fie punctele* A, B, C, D *necoplanare astfel încât* $AD=BD=CD$. *Fie* M, N, P *mijloacele segmentelor* $[AB],[BC],[AC]$. *Ştiind că* $DM\perp DP$, *arătaţi că* $DN\perp(DMP)$.

Rezolvare **:** Fie $E=pr_{(ABC)}D; AD=DB=DC\Rightarrow E$ este intersectia mediatoarelor $\Rightarrow EM\perp AB; EN\perp BC; EP\perp AC$ NP linie mijlocie in $\Delta ABC\Rightarrow NP \parallel AB$ dar $EM\perp AB\Rightarrow EM\perp PN$ (1)

$DE\perp(ABC)\Rightarrow DE\perp PN$ (2) Din relatiile (1) si (2) $\Rightarrow PN\perp(DEM)\Rightarrow PN\perp DM$

$DM\perp DP; DM\perp PN\Rightarrow DM\perp(DPN)\Rightarrow DM\perp DN$ (3)

MP linie mijlocie in $\Delta ABC\Rightarrow MP \parallel BC$ dar $EN\perp BC\Rightarrow EN\perp MP$, $DE\perp(ABC)\Rightarrow DE\perp MP$

Din ultimile doua relatii obtinem ca $MP\perp(DEN)\Rightarrow MP\perp DN$ (4) Deci $DN\perp(DMP)$