Concursul de Matematică "Grigore Moisil"
Urziceni, 30 ianuarie - 1 februarie 2015, Ediţia a IX-a

Clasa a IX-a

Subiectul 1. Demonstraţi că pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} + 3\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \geq 4.$$

* * *

Subiectul 2. Un număr real α are proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{3n}.$$

Demonstraţi că $\alpha \in \mathbb{Z}$.

* * *

Subiectul 3. Fie triunghiul ABC şi $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ astfel încât

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B}.$$

Dreapta care trece prin punctul A' şi este paralelă cu $B'C'$ intersectează dreptele AB şi AC în P, respectiv Q. Demonstraţi că $PQ \geq 2B'C'$.

* * *

Subiectul 4. La un concurs participă $2n$ elevi, unde $n \in \mathbb{N}^*$. La festivitatea de deschidere, unii dintre elevi îşi strâng mâna (dau noroc) şi s-a constatat că nu există niciun grup de 3 elevi care au dat noroc doi câte doi între ei.

Demonstraţi că au fost cel mult n^2 strângeri de mână.

* * *

Selecţie: Cristinel Mortici ______________________________ **@**

Concursul de Matematică "Grigore Moisil"
Urziceni, 30 ianuarie - 1 februarie 2015, Ediţia a IX-a

Clasa a X-a

Subiectul 1. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ şi $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z-a| + |z-b| = b - a$. Demonstraţi că $z \in \mathbb{R}$ şi $a \leq z \leq b$.

b) Rezolvaţi în numere complexe ecuaţia:

$$|z| + |z+1| + \cdots + |z+2015| = 1008^2.$$

Leo Giugiuc, Drobeta Tr. Severin

Subiectul 2. a) Demonstraţi că nu există $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$a\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}\right) + b = 5 + \sqrt[3]{5}.$$

b) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Demonstraţi că nu există $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$a_0 + a_1\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}\right) + a_2\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}\right)^n = 5 + \sqrt[3]{5}.$$

***

Subiectul 3. Fie $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ care satisfac simultan următoarele două relaţii:

$$f(x) \leq 4^x - \frac{3}{2} \leq g(x) \quad \text{şi} \quad f(x) \leq \frac{3}{2}x - x^2 \leq g(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in [-1,1].$$

Demonstraţi că există $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \leq mx + n \leq g(x)$, oricare ar fi $x \in [-1,1]$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface simultan următoarele relaţii:
a) $f(1) = 1$.
b) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
c) $f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.
Demonstraţi că $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

* * *

Selecţie: Cristinel Mortici ______________________________ @

Concursul de Matematică "Grigore Moisil"
Urziceni, 30 ianuarie - 1 februarie 2015, Ediţia a IX-a

Clasa a XI-a

Subiectul 1. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât $f(0)=f(1)=0$ şi definim:

$$\begin{aligned} A &= \{h\in[0,1] \mid \text{există } x\in[0,1] \text{ astfel încât } f(x+h)=f(x)\} \\ B &= \{h\in[0,1] \mid \text{există } x\in[0,1] \text{ astfel încât } f(x+1-h)=f(x)\}. \end{aligned}$$

Demonstraţi că $A\cup B=[0,1]$.

* * *

Subiectul 2. Fie $(a_n)_{n\geq 2}\subset(0,\infty)$ un şir cu ajutorul căruia definim:

$$x_n=\sum_{k=2}^{n} a_k^{1-\frac{1}{\ln k}} \qquad (n\in\mathbb{N};\ n\geq 2).$$

a) Demonstraţi că dacă $0<a_n\leq\frac{1}{n^2}$, oricare ar fi $n\geq 2$, atunci $(x_n)_{n\geq 2}$ este convergent.
b) Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ este convergent, oricare ar fi şirul $(a_n)_{n\geq 2}\subset(0,\infty)$ cu proprietatea că şirul $b_n=a_2+a_3+\cdots+a_n$ este convergent.

* * *

Subiectul 3. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice având pe diagonala principală toate rădăcinile complexe de ordinul n ale unităţii. Demonstraţi că există $X,\ Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A=X+Y$ şi $X^n=I_n$ şi $Y^n=0_n$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Subiectul 4. Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice inversabile. Demonstraţi că:
a) Dacă $n=2$ şi $\det(A+B)=\det A=\det B$, atunci $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.
b) Dacă matricea $A+B$ este inversabilă şi $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$, atunci n este par şi

$$\det(A+B)=\det A=\det B.$$

Ovidiu Munteanu, Braşov

Selecţie: Cristinel Mortici ______________________________ @

Concursul de Matematică "Grigore Moisil"
Urziceni, 30 ianuarie - 1 februarie 2015, Ediţia a IX-a

Clasa a XII-a

Subiectul 1. Fie G un grup finit cu n elemente şi H un grup (nu neapărat finit) cu proprietatea că $x^6 = e$, oricare ar fi $x \in H$ (e este elementul neutru al lui H).

Arătaţi că dacă există un morfism injectiv $f : G \to H$, atunci $n = 2^a 3^b$, cu $a, b \in \mathbb{N}$.

Dorel Miheţ, Timişoara

Subiectul 2. Determinaţi toate operaţiile "$*$" pe $[0,\infty)$ care sunt asociative, au element neutru pe 0 şi există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(x+y)*(x+z) = kx + (y*z)\,, \quad \text{oricare ar fi } x, y, z \in [0,\infty).$$

* * *

Subiectul 3. Demonstraţi că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integrabilă pe orice interval $[a,b]$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, satisface relaţia:

$$|f(x) - f(y)| \le |x-y|\,, \quad \text{oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R},$$

dacă şi numai dacă satisface relaţia:

$$\left|\int_x^y f(t)\,dt - f(x)(y-x)\right| \le \frac{1}{2}(x-y)^2\,, \quad \text{oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Nicolae Bourbăcuţ, Sarmizegetusa

Subiectul 4. Fie $f, g : [0,1] \to (0,\infty)$ astfel încât funcţia g este integrabilă, iar funcţiile f, $f-g$ şi $\frac{g}{f}$ sunt crescătoare. În plus,

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{f^2(x)+g^2(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{g^2(x)}{f^2(x)+g^2(x)}\,dx.$$

Demonstraţi că $f = g$.

Florin Stănescu, Găeşti

Selecţie: Cristinel Mortici____________________________________@