Demonstrații fără cuvinte (I)

(Altfel de probleme)

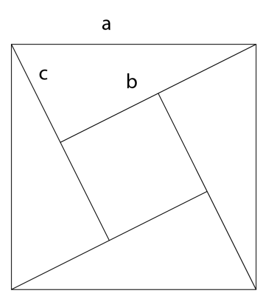
Miron Oprea, Ploiești

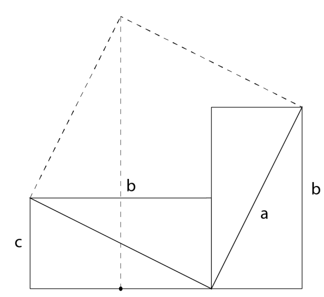
De câteva decenii, în jurnalele americane „*Mathematics Magazine*” și „*The College Mathematical Journal*”, apar, în mod regulat propuse, o serie de exerciții (probleme) sub forma unor *figuri, scheme, diagrame* etc. prin care se cere să se demonstreze „*fără cuvinte*” o anumită proprietate, relație sau chiar teoremă (cunoscută sau mai puțin cunoscută). Ideea unor astfel de exerciții este veche: o găsim în vechea matematică din India și China, în matematica arabo-islamică din Evul mediu și, chiar, în Italia Renașterii. Trebuie să precizăm că nu este vorba de a face intuitive anumite proprietăți, relații sau enunțuri de teoreme prin diverse figuri sau scheme, ci *procesul de demonstrație însuși*, îmbracă o haină intuitivă prin aceste figuri (diagrame sau scheme). Aceasta înseamnă că figurile respective sunt *veritabile demonstrații* ale unor proprietăți (relații). Uneori, aceste *demonstrații fără cuvinte* (demonstrații vizuale) sunt date sub formă *evolutivă* (prin câteva faze pe care le îmbracă procesul în sine). Pentru e rezolva astfel de exerciții este nevoie de anumite cunoștințe matematice (uneori, elementare, ca: *ariile unor figuri matematice, proprietăți legate de medianele unui triunghi, proprietăți de ordonare ale numerelor reale* ș.a.). Se cere multă ingeniozitate din partea rezolvitorului, răbdare, completări la figurile respective, anumite ecuații, relații metrice și de ordonare, notații etc. Compunerea unor astfel de exerciții cere fantezie, profunzime în domeniu. Astfel de exerciții merg mult mai departe decât faza *euristică* și creează o anumită satisfacție rezolvitorului mult mai profundă decât rezolvările clasice ale problemelor. Mai trebuie să precizăm că raționamentele matematice fără cuvinte nu se substituie rezolvărilor clasice de exerciții și probleme și că nu s-au extins (cel puțin până acum) la întreaga matematică. Oricum, suntem în fața unui nou mod de a aborda matematica – cel puțin, cea din învățământul preuniversitar. Despre importanța problemelor (și a problematizării) în educație matematică s-au ocupat mulți metodiști în istoria învățământului românesc (vezi [1], [2], [3], [6]), dar cel care a studiat și analizat *structura logică* ($I \Rightarrow C$) a unei probleme (cu efecte de clasificare) a fost distinsul profesor brașovean *H. Banea*. În [1], prof. Horea Banea stabilește opt tipuri de probleme, îmbrăcând complet întregul aspect al acestora, dela simplul *exercițiu* până la *probleme de cercetare* (creativitate). Precizăm că toate tipurile de probleme, pot îmbrăca complet forma unor *figuri, diagrame, scheme* etc., așa cum a fost preconizat de către R. Nelsen [5] în lucrarea sa, care, de fapt, stă la baza acestui articol.

În continuare, vom rezolva câteva exerciții (probleme) pe această cale.

1. Teorema lui Pythagora

În [5] se dau 13 demonstrații „vizuale” acestei celebre teoreme. Noi ne mărginim la două: cea propusă în sec. XII de matematicianul indian Bhaskara și cea din 1876 a lui J. A. Garfield.





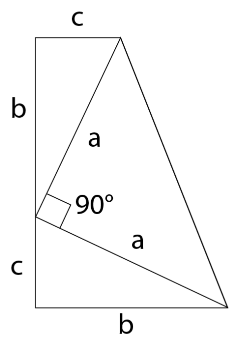
Bhaskara a desenat figurile: și a scris sub ele :„*Contemplați-le !*”(și deduceți din ele teorema lui Pythagora).

Notăm cu a, b și c măsurile laturilor triunghiurilor dreptunghice din cele două configurații. În prima figură putem scrie:

$a^2 = 4 \cdot \dfrac{bc}{2} + (b-c)^2 \Leftrightarrow a^2 = 2bc + b^2 + c^2 - 2bc = b^2 + c^2$ (teorema lui Pythagora).

În a doua figură , completăm pătratul prin cele două triunghiuri dreptunghice ajungând, astfel, la pătratul din figura primă. Și, deci, la fel, am *demonstrat vizual* teorema lui Pythagora.

În 1876, al 20-lea președinte al S.U.A., *James Abraham Garfield* (1831-1881), care a fost asasinat după 6 luni și 15 zile dela investitură, a dat o *demonstrație vizuală* teoremei lui Pythagora utilizând calculul ariei unui trapez dreptunghic (ca în figura alăturată):



Aria trapezului $= \dfrac{b+c}{2}(b+c)$

De asemenea: $\dfrac{bc}{2} + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{bc}{2}$

Deci, egalând și simplificând, cele două exprimări ale ariei trapezului, obținem: $b^2 + c^2 = a^2$ (q.e.d.)

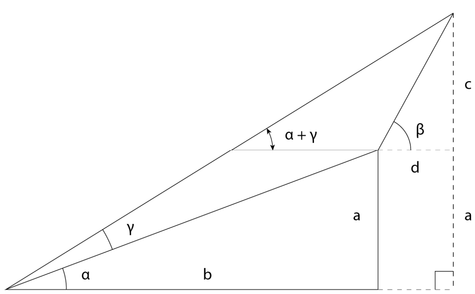
Napoleon Bonaparte
(1769-1821)

J. A. Garfield
(1831-1881)

În istoria matematicii sunt consemnate numai două nume de conducători de stat care au avut și preocupări matematice: *Napoleon Bonaparte* (împăratul Franței) și *J. A. Garfield* (președintele S.U.A.)

Napoleon avea un interes deosebit pentru geometrie (se poate spune că avea interes pentru toate științele vremii sale), căci așa se explică faptul că în campania sa din Egipt a fost însoțit de o serie de mari savanți ai Franței. *Garfield* era un om foarte capabil; se zice că era ambidextru*: el scria, din aceeași mișcare, cu mâna dreaptă în limba latină și cu mâna stângă în greacă, aceeași frază sau text. Și, în acest sens, Garfield rămâne unic în istoria umanității.

2. Matematicianul francez *Nicolas Chuquet* (din sec. XV), în lucrarea sa *„Le Triparty en la Science des Nombres”*, din 1484, a demonstrat următoarea implicație: dacă a, b, c, d sunt întregi, avem implicația $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.



În [5] se propun trei demonstrații *„fără cuvinte”* ale inegalității lui Chuquet de către *Richard A. Gibbs, Li Changming* și RBN.

Noi ne vom opri asupra demonstrației date de Richard care are la bază (folosind funcția trigonometrică $tg\alpha$) ideea că un unghi exterior al unui triunghi este egal cu suma unghiurilor interioare triunghiului din celelalte

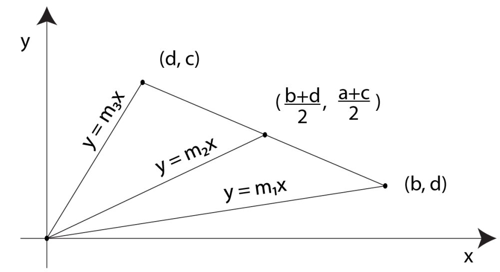
* *Ambidextru* este capacitatea dea efectua operații (fizice, de scriere, de calcul) cu ambele mâini

două vârfuri.
Astfel figura de mai sus reprezintă o *demonstrație* vizuală (fără cuvinte) a inegalității lui Chuquet.
Demonstrație:

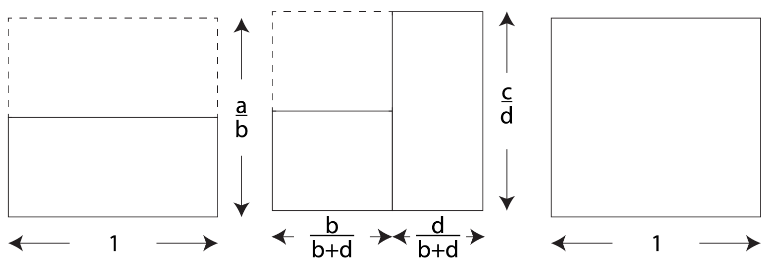
$\frac{a}{b} = tg\alpha; \frac{c}{d} = tg\beta$ și cum $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow tg\alpha < tg\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$, însă $\frac{a+c}{b+d} = tg(\alpha+\gamma)$.

Din figură avem că: $\alpha < \alpha + \gamma < \beta \Leftrightarrow tg\alpha < tg(\alpha+\gamma) < tg\beta \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

De remarcat că și celelalte două demonstrații sunt la fel de ingenioase și invităm cititorul să le *Privească* ! și să deducă din ele inegalitatea lui Chuquet:

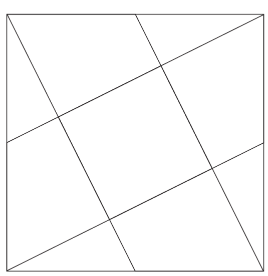


$m_1 < m_3 \Rightarrow m_1 < m_2 < m_3$
(Li Changming)

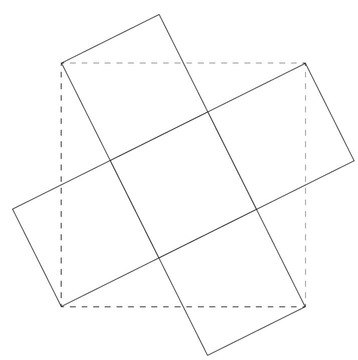


(R.B.N.)

3. Un pătrat în alt pătrat
Dacă unim fiecare vârf al unui pătrat cu mijlocul uneia din cele două laturi opuse (mergând în sensul invers al acelor de ceasornic) obținem un pătrat în interiorul pătratului dat, ca în figura de mai jos. Să se arate că aria pătratului din interior este $1/5$ din aria pătratului mare.



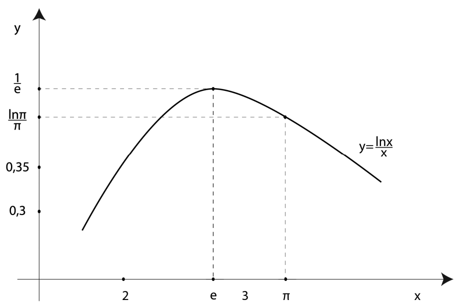
Soluție:
Completăm figura dată cu patru triunghiuri dreptunghice (câte unul în fiecare vârf), ajungând, astfel, la figura din dreapta.



Din figură se vede că ariile celor patru pătrate, egale împreună cu aria pătratului din interior este aria pătratului mare. Deci aria pătratului din interior este a 5-a parte din aria pătratului mare (dat).

4. O inegalitate care leagă π *și e* $\left(\pi^e < e^\pi\right)$

Iată figura care demonstrează această inegalitate:



Din figură (care reprezintă graficul funcției $y = \frac{\ln x}{x}$) rezultă inegalitatea: $\frac{\ln \pi}{\pi} = \frac{1}{e}$ (funcția are în e un maxim).
Deci avem echivalențele:
$\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln \pi^{\frac{1}{e}} < \ln e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \pi^{\frac{1}{\pi}} < e^{\frac{1}{e}}$, în care, ridicând ambii membri la puterea πe, obținem inegalitatea din enunț.

Invităm cititorul să ia *sub creion* și următorul articol al distinsului matematician I. Dăncilă din acest număr al Axiomei.

(continuare în numărul următor)

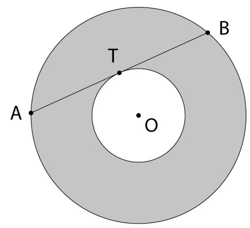
Bibliografie
[1] H. Banea, *Metodica predării matematicii,* Ed. Paralela 45, Pitești, 1998
[2] D. Brânzei și R. Brânzei, *Metodica predării matematicii,* Ed. Paralela 45, Pitești, 2003
[3] Fl. Cîrjan, *Didactica matematicii*, Ed. Corint, București, 2007
[4] A. Krygowska, *Dezvoltarea activității matematice a elevilor,* Gazeta Matematică, nr. 4 și 5, 1967
[5] Roger B. Nelsen, *Preuves sans mots,* Ed. Hermann, Paris, 2013
[6] E. Rusu, *Problematizare și probleme în matematica școlară,* Ed. Didactică, București, 1978

Imitându-i pe vechii indieni

Ioan Dăncilă, București

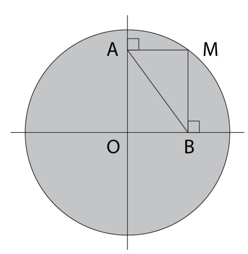
În lucrările vechilor indieni exista o veritabilă tradiție în prezentarea problemelor de geometrie. Ipoteza era alcătuită dintr-un desen și însoțită de îndemnul „*Privește!*”. În cele ce urmează, în fiecare dintre problemele următoare vom prezenta un desen și câteva mărimi; vom considera subînțeles îndemnul „*Privește!*” și-l vom adăuga pe al nostru: „*Gândește și răspunde!*”. În fiecare caz, prin S am notat mărimea ariei.

1.



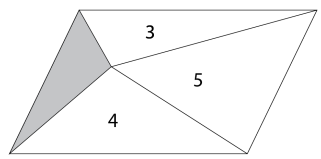
AB = 4 cm S = ?

2



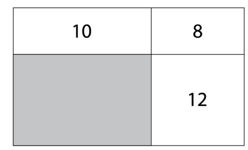
AB =5 cm S = ?

3.



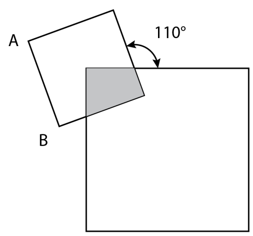
3, 4, 5 sunt ariile triunghiurilor în care sunt înscrise   S = ?

4



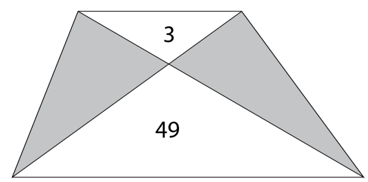
8, 10, 12 sunt ariile în care sunt scrie   S = ?

5.



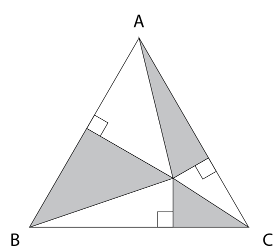
AB = 3 cm   S = ?

6.



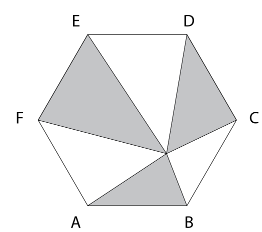
16 și 49 sunt ariile triunghiurilor în care au fost scrise   S = ?

7.



AB = BC = CA = $\sqrt{3}$ cm   S = ?

8.



ABCDEF hexagon regulat cu latura de 2 cm   S = ?

Asupra unor tipuri de ecuații transcendente

Ionel Tudor, Liceul tehnologic „Mihai Viteazul”, Călugăreni, Giurgiu

În Gazeta Matematică şi în alte reviste din ţară au fost propuse unele ecuaţii transcendente cu funcţii trigonometrice şi care au soluţii numere naturale. Rezolvarea lor se bazează pe folosirea prorietăților de injectivitate, monotonie,convexitate şi derivabilitate a funcţiilor precum şi pe folosirea ingenioasă a formulelor trigonometrice.

Prezentăm câteva ecuaţii de acest tip. Vom utiliza anumite valori cunoscute(sau care se pot deduce) pentru funcţiile tigonometrice ale unor unghiuri particulare:

$$\sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4};tg\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ ;\ \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\ ;tg\frac{2\pi}{5}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\ ;\ \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\ ;\ tg\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$$

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\ ;\ \cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\ ;\ tg\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ ;\ tg\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}\,.$$

1) Să se rezolve în N , ecuaţia : $tg\frac{\pi}{n}tg\frac{\pi}{2n}=\sqrt{n}-2.$

Soluție: Valorile n=0 , n=1 şi n=2 sunt excluse nefiind în domeniul de definţie al funcţiilor din ecuaţie. Nici $x\in\{3,4\}$ nu verifică ecuaţia. Cercetăm dacă n=5 este soluţie.

Avem $tg\frac{\pi}{5}tg\frac{\pi}{10}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}=\frac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$

şi deci n=5 este soluţie a ecuaţiei.

Pe $(2,\infty)$ funcţia dată de $\sqrt{x}-2$ este strict crescătoare iar $tg\frac{\pi}{x}tg\frac{\pi}{2x}$ este strict descrescătoare ca produs a două funcţii descrescătoare pozitive. Rezultă unicitatea soluţiei x= 5 în N şi chiar în intervalul$(2,\infty)$.

2) Să se rezolve în N , ecuaţia :

$$\sqrt{\sin^4\frac{\pi}{n}+4\cos^2\frac{\pi}{n}}+\sqrt{\cos^4\frac{\pi}{n}+4\sin^2\frac{\pi}{n}}=n.$$

Soluție:

Se constată că n=0 , n=1 şi n=2 nu verifică ecuaţia iar pentru n=3 avem : $\sqrt{\frac{9}{16}+1}+\sqrt{\frac{1}{16}+3}=\frac{5}{4}+\frac{7}{4}=3$, deci n=3 este soluţie a ecuaţiei . Mai există alte soluţii ?

Răspunsul este greu de dat prin considerente de monotonie sau convexitate , deoarece funcţia din membrul întâi al ecuaţiei este destul de complicată.

Notăm $x=\frac{\pi}{n}$ şi atunci $f(x)=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$ > 0, iar $f^2(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+4+2\sqrt{(\sin^4 x+4\cos^2 x)(\cos^4 x+4\sin^2 x)}=...=9$, deci $f(x)=3, \forall x\in R$,

de unde obţinem că soluţia n=3 este unică.

3) Să se rezolve în $N\setminus\{0,2\}$, ecuaţia: $tg\frac{\pi}{n}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{n}}{4+\sqrt{n}}}$

Soluţie: n=1 nu verifică ecuaţia. Obţinem :

$\cos^2\frac{\pi}{n}=\frac{1}{1+tg^2\frac{\pi}{n}}=\frac{1}{1+\frac{4-\sqrt{n}}{4+\sqrt{n}}}=\frac{4+\sqrt{n}}{8}$ deci $\cos\frac{2\pi}{n}=2\cos^2\frac{\pi}{n}-1=\frac{4+\sqrt{n}}{4}-1=\frac{\sqrt{n}}{4}\le 1$

de unde $n\le 16$. Valoarea n=16 nu se verifică, şi rămâne să rezolvăm ecuaţia $\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{\sqrt{n}}{4}$ în mulţimea {3,4,5,...,14.15}.

Ambii membri ai ecuaţiei sunt funcţii strict crescătoare şi proprietatea de monotonie nu ne poate ajuta. De asemenea , funcţiile $x\mapsto\cos\frac{2\pi}{x}$ *şi* $x\mapsto\frac{\sqrt{x}}{4}$ sunt ambele concave (au derivatele a doua <0) şi nici prin considerente de convexitate-concavitate nu putem aborda ecuaţia. Avem de verificat 13 valori , destul de multe!

Ne vom folsi de o consecinţă a ***lemei lui Mertens***, pe care a stabilit-o ***prof dr.Marcel Ţena în G.M.B.nr.6/2009***:

o egalitate de forma $\cos\frac{2\pi}{n}=a+b\sqrt{d}$ cu a,b raţionale , $b\neq 0$ şi d întreg liber de pătrate, are loc dacă şi numai dacă $n\in\{5,8,10,12\}$

Pentru ecuaţia noastră $\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{4}\sqrt{n}$, obţinem că $n_1=8$ *şi* $n_2=12$ sunt soluţii.

4) Să se rezolve în N ecuaţia: $\sin^2\frac{\pi}{n}-\sin^2\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{n-1}$.

Soluţie: Impunem condiţia n $\geq$ 2.Pentru n=3 obţinem

$\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3-1}$, deci n=3 este soluţie.

Dacă n=4 , avem $\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}-\frac{2-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\neq\frac{1}{3}$.

Pentru n=5 avem $\sin^2\frac{\pi}{5}-\sin^2\frac{\pi}{10}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}=\frac{1}{5-1}$

deci şi n=5 este soluţie.

Pentru n $\geq$ 6 , ecuaţia o scriem echivalent:

$$\frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{2}-\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}=\frac{1}{n-1}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{2}{n-1}\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}=\frac{1}{n-1}$$

Dacă n $\geq$ 6, avem $\frac{\pi}{2n}<\frac{3\pi}{2n}\leq\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$ şi folosind cunoscuta inegalitate

$0<\sin x<x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ar rezulta $\frac{1}{n-1}<\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{3n}$, de unde

$4n^2-3\pi^2n+3\pi^2<0\Rightarrow n<\frac{3\pi^2+\pi\sqrt{9\pi^2-48}}{8}<\frac{3\pi^2+3\pi^2}{8}=\frac{3\pi^2}{4}<\frac{30}{4}<8$, deci

n$\in$ {6,7}.

$n=6\Rightarrow\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\neq\frac{1}{5}$

$n=7\Rightarrow 1=6\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}<6\cdot\frac{3\pi^2}{196}\Rightarrow 196<18\pi^2<180$, fals!

Ecuaţia are doar soluţiile $n_1=3, n_2=5$.

5) Să se rezolve în N ecuaţia: $tg\frac{3\pi}{n}-4\sin\frac{\pi}{n}=\sqrt{n}$.

Soluţie: Pentru $n\in\{0,1,2,3,4,6\}$ se constată că ecuaţia nu este verificată. Dacă n = 5 avem $-4\sin\frac{\pi}{5}<0$ *şi* $\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{5}<\pi\Rightarrow tg\frac{3\pi}{5}<0$, deci $tg\frac{3\pi}{5}-4\sin\frac{\pi}{5}<0<\sqrt{5}$,

adică nici n=5 nu este soluţie. Dacă n $\geq$ 8 , ar fi soluţie, am avea $\frac{3\pi}{n}\leq\frac{3\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$

şi cum în cadranul I, funcţia tangentă este strict crescătoare ar rezulta $\sqrt{n}<tg\frac{3\pi}{n}<tg\frac{3\pi}{8}=\sqrt{2}+1, deci\ n<3+2\sqrt{2}<3+4=7$,

în contradicție cu presupunerea n$\geq$ 8.

A mai rămas de verificat n=7. Notăm $z=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$ şi rezultă

$\sin\frac{\pi}{7}=\frac{z-\bar{z}}{2i}, tg\frac{3\pi}{7}=\frac{z^3-\bar{z}^3}{i\left(z^3+\bar{z}^3\right)}$.

Se obţine $d=tg\frac{3\pi}{7}-4\sin\frac{\pi}{7}=...=i\cdot\frac{2\left(z^4-\bar{z}^4\right)-\left(z^3-\bar{z}^3\right)-2\left(z^2-\bar{z}^2\right)}{z^3+\bar{z}^3}$ şi folosind

$z^7=-1, deci\, z^4=-\frac{1}{z^3}$, rezultă $d^2=...=7, deci\, d=\sqrt{7}$.

Astfel ecuaţia dată are singura soluţie naturală , n= 7.

Asemănător se arată că ecuaţia în **N**, $tg\frac{3\pi}{n}+4\sin\frac{2\pi}{n}=\sqrt{n}$, are soluţia unică n=11.

6) Să se rezolve în N, ecuaţia: $\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}=\frac{1}{n-1}$

Soluţie: n=0 nu verifică ecuaţia iar pentru n=1 nu este definită ecuaţia.
Nici n=2 nu este soluţie deoarece

$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}\neq 1$.

Arătăm că n=3 verifică ecuaţia , adică $E=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

Avem

$2E\cdot\sin\frac{\pi}{7}=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)=$

$=\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}$

Cum $\sin\frac{\pi}{7}\neq 0$, după simplificare , rezultă $E=\frac{1}{2}$.

Pentru $n\geq 4, rezultă\ 2n+1\geq 9, de\,unde\ \frac{\pi}{2n+1}\leq\frac{\pi}{9}<\frac{\pi}{6}$.

Cum în cadranul I , funcţia cos este strict descrescătoare avem:

$\cos\frac{\pi}{2n+1}>\cos\frac{\pi}{9}$, $-\cos\frac{2\pi}{2n+1}>-1$ *şi* $\cos\frac{3\pi}{2n+1}>\cos\frac{\pi}{3}$.

Obţinem $\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}>\cos\frac{\pi}{6}-1+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,

$\forall n\geq 4$, natural.

Dacă $n \geq 4$, ar fi soluţie a ecuaţiei date , am avea $\frac{1}{n-1} > \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, *de unde* $n-1 < \frac{2}{\sqrt{3}-1}$, *deci* $n < \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3} < 4$, în contradicţie cu presupunerea $n \geq 4.$ Ecuaţia dată are singura soluţie naturală n=3.

Bibliografie

[1] Colecţia Gazetei Matematice seria B.
[2] Colecţia Revistei Matematice a elevilor din Timişoara
[3] Laurenţiu Panaitopol şi Mihai Bălună, *Matematică - manual cl.a X-a*, Editura G.I.L, 2000

Iluștri reprezentanți ai matematicii și fizicii în apărarea unui mare savant – Marie Curie[†]

Grațiela Calcan, Ploiești

Marie Sklodowska Curie, licențiată în fizică (1893) și, apoi, în matematică (1894) a fost prima femeie profesor la Sorbona care a ținut primul și unicul curs din lume (în epocă) de radioactivitate. Ea a fost laureată de două ori a Premiului Nobel, prima dată împreună cu soțul său, Pierre Curie și H. Becquerel, în 1903, pentru descoperirea radioactivității, a elementelor poloniu și radiu. Cel de-al doilea premiu, în 1911, pentru chimie, descoperind o metodă pentru dozarea radiului prin măsurarea emanației sale.

Figura prestigioasă a Mariei Curie a contribuit la o nouă viziune a științei și a locului femeii în societate. Realizările de excepție se datorează muncii titanice, perseverenței, curiozității, pasiunii pentru știință, la flacăra căreia se va topi încet. Din mica studentă poloneză, venită la Paris, în 1891, să facă studii universitare, deoarece în Polonia ocupată femeile nu aveau voie să studieze la universitate, cu mari eforturi materiale și o mare ambiție pentru studiu, s-a născut viitoarea savantă. Alături de soțul ei, Pierre Curie, într-un șopron impropriu pentru a face experiențe, a urmărit zile, luni, în frig, fenomene de calcinare, dezagregare a minereurilor aduse cu mari eforturi din Cehia, descoperind radiul și poloniul. În 1914, a înființat Institutul Radiului la Paris, unde va ține cursuri de radioactivitate, va acorda burse unor studenți merituoși, va face cercetări neîntrerupte, înființând Școala de radiologie, 1916-

[†] Lucrare prezentată la cea de-a XVI-a Conferinţă Anuală a S.S.M.R., Ploiești, octombrie 2012

1918, unde va începe o nouă bătălie, cu cancerul și va pune în practică principiile sale, și anume, că știința trebuie pusă la îndemâna oamenilor simpli. Marie Curie va realiza, în perioada Primului Război Mondial, primul „vehicol radiologic" care va circula din spital în spital, ajungând până la 20 vehicule echipate de ea în cele peste 200 săli, amenajate tot de ea, ajutând, în acest mod, sute de răniți.

Un episod negru în existența tumultuoasă a acestui savant va fi în anul 1911. La îndemnul colegilor de la Sorbona, candidează spre a fi membru la Academia de Științe, în timp ce, cu un an înainte, în 1910, refuzase din prea multă modestie, Legiunea de Onoare, urmând exemplul soțului său, Pierre Curie, dispărut într-un tragic accident în 1906. Concurentul său este un fizician cunoscut, Edouard Branly, un profund catolic. Pe fondul unor manifestări antisemite, național-religioase, toată presa de dreapta susține candidatura lui Branly, ca de altfel și aripa conservator-clericală a Academiei. Se susține că toți membrii Academiei au fost bărbați și acest lucru nu trebuie schimbat întrucât s-ar afecta ordinea socială, inversându-se rolurile în natură. Se declanșează o luptă în care ziariștii de dreapta afirmă că Marie Curie este evreică, este dușmanul Bisericii Catolice, că este o excentricitate să dorească intrarea în Academie. Se scrie „Marie Curie contra Branly, Dreyfus contra Branly", „lupta geniului național cu demonul străin".

În acest moment de cumpănă al savantei se remarcă o reacție de sprijin a unor matematicieni renumiți ai timpului precum: Henri Poincaré, Gaston Darboux, Emile Borel, P. Appel, care fac campanie pentru ea, în favaoarea primirii în Academie. Ei sunt revoltați de motivele invocate și i se ilustreaza meritele științifice. În final, îi va lipsi un vot pentru a fi aleasă. Între timp, Academia de Științe din Stockholm a înștiințat-o că a primit Premiul Nobel pentru chimie. Acest lucru a declanșat o furtună de răutate împotriva Mariei Curie. Este acuzată că tulbură liniștea căminelor printr-o legătură cu profesorul Paul Langevin, colaborator apropiat și doctorand al lui Pierre Curie, că dezonorează numele de Curie, este insultată, amenințată cu violențe. Campania de presă este teribilă, este acuzată ca fiind ba evreică, ba rusoaică sau nemțoaică, „*străina*" care a venit la Paris să uzurpeze o situație înaltă. Chiar dacă răul a fost comis și Marie Curie a fost împinsă în pragul sinuciderii și nebuniei, acești prieteni din lumea universitară o înconjoară cu multă atenție, îi ocrotesc sănătatea, îi dau curaj să meargă mai departe. J. Perrin, fizician renumit, profesor la Sorbona, laureat al Premiului Nobel pentru fizcă în 1926 pentru contribuții la studiul radiațiilor catodice și a radiațiilor Röntgen, spune în cartea Margueritei Borel (soția lui E. Borel), că dacă nu ar fi fost ei, grupul de prieteni care au apărat-o, „Marie ar fi părăsit Franța și noi am fi fost marcați de o rușine eternă." În urma acestui șoc emoțional, Marie Curie cade într-o depresie psihică și se îmbolnavește grav de rinichi. Va depăși, tot cu ajutorul prietenilor menționați, momentul dificil, sănătatea îmbunătățindu-i-se în 1912-1913, când furtunile mediatice se liniștesc și încep din nou să i se recunoască meritele. Universitatea Sorbona și Institutul Pasteur construiesc împreună Institutul de Radiu care va cuprinde un laborator de radioactivitate sub conducerea Mariei Curie și un laborator de cercetări și Curieterapie în care se vor face studii asupra cancerului şi tratamente bolnavilor, urmând ca ea să fie considerată pionieră a radioterapiei. Forța caracterului său și dragostea pentru știință și oamenii îi vor da putere să se dedice acestui Institut, să continue munca de cercetare și de formare a noi cercetători, să lupte până în ultima clipă a vieții când va scrie tratatul „Radioactivitatea”. În acest mod, savanta s-a implicat în lupta cu această maladie teribilă, cancerul, care reprezintă o amenințare la adresa umanității, nu numai la începutul anilor 1900, ci și în contemporaneitate.

Din cele de mai sus, rezultă că matematica este și artă și știință și tehnică. Mărețele figuri intelectuale, portretele unor matematicieni sub raportul personalității lor și al activității lor, dedicați cercetărilor, dar și spirite drepte, curajoase, oneste, fac ca *Istoria matematicii* să fie o parte componentă a culturii, cu un rol decisiv în formarea personalității umane.

Bibliografie

[1] Eve Curie, *Doamna Curie*, București, 1942

[2] Maurice Fréchet, *Emile Borel, viața și opera*, Ed. Științifică, București, 1972

[3] Henri Poincaré, *Morală și știință*, Imprimeria Fundației Culturale „Principele Carol”, 1924

[4] Henri Poincaré, *La valeur de la Science*, Paris, 1909

[5] Octav Onicescu, *Învățați ai lumii*, Editura Albatros, București, 1976

[6] Edmond Nicolau, I. M. Ștefan, *100 de oameni de știință și inventatori români*, Editura Ion Creangă, București, 1987