PROBLEME REZOLVATE

Gheorghe Crăciun

CLASA a V-a

1 Un număr natural este ,,prieten'' cu 2014 dacă restul şi câtul împărţirii lui 2014 la acesta sunt egale. Câţi ,,prieteni'' are 2014?

Gheorghe Crăciun, O.L.M Prahova

Rezolvare

Observăm că $2014 = 1\cdot 2\cdot 19\cdot 53$ Avem $2014 = r\cdot i + r, r < i$ adică 2014=r(i+1)

Pentru r=1 obţinem i=2013
Pentru r=2 obţinem i=1006
Pentru r=19 obţinem i=105
Pentru r=38 obţinem i=52 Restul valorilor lui r (19,53,106,2014)nu convin deoarece nu este îndeplinită şi condiţia r<i.

---

2 Se consideră numărul $n = 9+99+999+...+\underbrace{99...99}_{2014\, cifre}+2014.$

a) Arătaţi că numărul n este divizibil cu 10;
b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii numărului n la 111.

Aurica Pîrvescu, Botoşani, O.L.M Bucureşti

Rezolvare

a)Numărul n are 2014 termeni formaţi numai cu cifra 6 . Vom scrie termenul 2014 ca o sumă formată din 2014de 1.

Avem
$n = 9+99+999+...+\underbrace{99...99}_{2014\, cifre}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2014\, termeni} = (9+1)+(99+1)+(999+1)+...+(99...99+1)$

sau $n = 10+100+1000+...+1\underbrace{00...00}_{2014\, cifre} = \underbrace{11...11}_{2014\, cifre}0$.

Cum ultima cifră este 0, numărul este divizibil cu 10

b) Vom scrie $n = 111\cdot 10^{2012}+111\cdot 10^{2009}+...+111\cdot 10^{2}+10 =$
$= 111\cdot\left(1\cdot 10^{2012}+1\cdot 10^{2009}+...+1\cdot 10^{2}\right)+10$

Câtul este $\underbrace{\underbrace{100}\underbrace{100}...\underbrace{100}}_{671\ grupe}$, iar restul este 10.

---

3 Se consideră mulţimea A care are ca elemente numere naturale scrise cu cinci cifre diferite care aparţin mulţimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

a) Determinaţi câte numere din mulţimea *A* au prima cifră 1 şi ultima cifră 3;
b) Determinaţi câte elemente conţine mulţimea A;
c) Calculaţi suma tuturor elementelor din mulţimea A.

Marius Perianu, Slatina, O.L.M Bucureşti

a)Numerele au forma $\overline{1abc3}$. Cifra a poate lua 3 valori, cifra b poate lua 2 valori, iar cifra c o valoare. Sunt $3\cdot 2\cdot 1=6$ numere.

b)Numerele au forma $\overline{abcde}$. Cifra a poate lua 5 valori, cifra b poate lua 4 valori, cifra c poate lua 3 valori, cifra d poate lua 2 valori, iar cifra e o valoare. Sunt $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ de numere.

c)Fiecare cifră apare, pe fiecare poziţie, de 24 de ori şi atunci suma numerelor are forma

$S=24\cdot(1+3+5+7+9)\cdot 10^4+24\cdot(1+3+5+7+9)\cdot 10^3+24\cdot(1+3+5+7+9)\cdot 10^2+$

$+24\cdot(1+3+5+7+9)\cdot 10+24\cdot(1+3+5+7+9)=24\cdot 25\cdot 11111=6666600$

---

4 Determinaţi numerele $\overline{ab}$ ştiind că împărţind numărul $\overline{ab5}$ la numărul $\overline{ba}$ obţinem câtul 5 şi restul 25.

Cristian Mangra, O.L.M Bucureşti

Rezolvare

Din teorema împărţirii cu rest avem $\overline{ab5}=5\cdot\overline{ba}+25$, cu $\overline{ba}>25$.$19\cdot a=8\cdot b+4$

Deoarece numărul din membrul drept se divide cu 4 deducem că $a\in\{4,8\}$. Pentru $a=4$, obţinem $b=9$ şi numărul căutat este 49. Pentru $a=8$ nu avem soluţie.

---

5 Să se determine mulţimea :

A=$\{\overline{abba} \mid \overline{ab}-\overline{ba}$ este pătrat perfect unde a, b sunt cifre nenule$\}$.

Roxana Soare, Ploieşti

Rezolvare

$$\overline{ab}-\overline{ba}=9(a-b)\Rightarrow a-b\in\{1,4\}$$

Dacă a-b=1 ⇒a=b+1 ⇒$\overline{abba}\in\{2112,3223,4334,5445,6556,7667,8778,9889\}$

Dacă a-b=4 ⇒a=b+4 ⇒$\overline{abba}\in\{5115,6226,7337,8448,9559\}$

Deci A=$\{2112,3223,4334,5115,5445,6226,6556,7337,7667,8448,8778,9559,9889\}$

CLASA a VI-a

1. Dacă numerele naturale x, y, z verifică egalitatea $67x+52y=15z$, arătaţi că numărul $(x+y)(y+z)(z+x)$ se divide cu 2010.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova ,O.L.M. Bucureşti

Rezolvare

$2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$.

Vom arăta că numărul $(x+y)(y+z)(z+x)$ se divide cu 2, cu 15 şi cu 67.

Relaţia dată se mai scrie $67x+67y=15y+15z$ sau $67(x+y)=15(y+z)$.

Cum 15 este relativ prim cu 67, rezultă 15 divide pe $x+y$, aşadar $15\mid(x+y)(y+z)(z+x)$ (1).Cum 67 este relativ prim cu 15 rezultă 67 divide pe $y+z$, aşadar $67\mid(x+y)(y+z)(z+x)$ (2)

Dacă x, y, z sunt numere naturale atunci cel puţin două au aceeaşi paritate şi prin urmare, cel puţin una din sumele $x+y$, $y+z$, $z+x$ se divide cu 2, de unde

$2\left|(x+y)(y+z)(z+x)\right.$ (3) Din (1), (2) şi (3) rezultă

$2\cdot 15\cdot 67\left|(x+y)(y+z)(z+x)\right.$, adică $2010\left|(x+y)(y+z)(z+x)\right.$.

2. Notăm cu S mulţimea numerelor de cinci cifre distincte formate cu elementele mulţimii {1, 2, 3, 7, 8}.

a) Dacă p este un element oarecare al mulţimii S, arătaţi că numerele $5p, 3p$ şi $7p$ **nu** sunt elemente ale mulţimii S.

b) Determinaţi toate elementele $m\in S$ care au proprietatea că $4m\in S$.

Gheorghe Rotariu, Dorohoi, Botoşani, O.L.M Bucureşti

Rezolvare

a)Dacă $p\in S$, atunci $U(5p)\in\{0,5\}$. Deci $5p\notin S$. Dacă $p\in S$, $p=9k+3,\ k\in N$. Dar $3p$ este multiplu de 9, deci $3p\notin S$ Dacă $p\in S$, $p=\overline{abcde}$ şi $7p\in S$, atunci $a=1$ şi $b=2$. Se obţine că $7\cdot\overline{12cde}\notin S$.

a)Dacă $m\in S$, $m=\overline{abcde}$ şi $4m\in S$, atunci $a\in\{1,2\}$. Dacă $a=1$, atunci $b\in\{7,8\}$ şi se obţine $m=17832$. Dacă $a=2$, atunci $b=1$ şi se obţine $m=21783$.

3. Arătaţi că există un singur număr prim de trei cifre cu produsul cifrelor egal cu 70.

***

Rezolvare

Descompunerea în factori a lui 70 este $2\cdot 5\cdot 7$ şi putem forma numerele $725, 752, 527, 572, 275, 257$. Numerele care au ultima cifră 5 nu sunt prime; se divid cu 5, iar numerele care au ultima cifră 2 nu sunt prime pentru că se divid cu 2. $527=17\cdot 31$, aşadar nu este număr prim . 257 este număr prim

4. Fie numerele a=2k+1,b=3k+2,c=4k+3,d=5k+4,k număr natural.

Arătaţi că $\frac{[c,d]}{c}-\frac{[a,b]}{b}-\frac{[a,b]}{a}=1$, oricare ar fi k$\in$ N.(notaţia $[a,b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.

Ioana Crăciun,O.L.M Prahova

Rezolvare:

Se ştie că $(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b$.Fie d=$(a,b)\Rightarrow$ d/2k+1 şi d/3k+2$\Rightarrow$ d/2(3k+2)-3(2k+1)$\Rightarrow$ d/1$\Rightarrow$ d=1$\Rightarrow$ $[a,b]$=a · b,analog $[c,d]$=c · d$\Rightarrow$ $\frac{[c,d]}{c}-\frac{[a,b]}{b}-\frac{[a,b]}{a}=$ d-a-b=5k+4-(2k+1)-(3k+2)=1.

5. Fie numărul $A=1234...200820092010$.

Să se calculeze suma cifrelor numărului A.

b) Să se stabilească dacă numărul A este pătrat perfect .

c) Să se stabilească câte numere pătrate perfecte se pot obţine schimbând ordinea cifrelor numărului A.

Petre Bătrâneţu, O.L.M. 2010,Galaţi

Rezolvare:a) Numărul 1999 este numărul care are suma cifrelor cea mai mare faţă de toate numerele de la 1 la 2010. Numerele naturale mai mici decât 1999 se grupează astfel: $(1;1998),(2;1997),(3;1996),...,(999;1000)$. În fiecare grupă, suma cifrelor este 28. Suma cifrelor celorlalte numere rămase este: 28 pentru numărul 1999, 2 pentru numărul 2000, 3 pentru numărul 2001, ..., 11 pentru numărul 2009, 3 pentru numărul 2010.Așadar, suma cifrelor numărului A este : $999\cdot 28+28+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+3=28068.$

b) Numărul 28068 se divide cu 3 dar nu se divide cu 9, deci, numărul A nu este pătrat perfect.

c) Oricum s-ar schimba ordinea cifrelor numărului A, suma cifrelor va rămâne aceeaşi. Rezultă că nu se obţine nici un număr pătrat perfect.

6. Numerele 94, 126 şi 174 împărţite pe rând la acelaşi număr natural n de două cifre se obţine de fiecare dată acelaşi rest r. Să se afle împărţitorul şi restul.

O.L.M. 2010, Mureș

Soluție : $94 = n\cdot c_1 + r$ (1)

$126 = n\cdot c_2 + r$ (2)

$174 = n\cdot c_3 + r$ (3)

$(2)-(1) \Rightarrow n\cdot(c_2-c_1)=32$

$(3)-(2) \Rightarrow n\cdot(c_3-c_2)=48$

$(3)-(1) \Rightarrow n\cdot(c_3-c_1)=80$

$\Rightarrow$ *n* este divizor comun al numerelor 32, 48 şi 80. Calculând (32, 48, 80) obţinem 16. Îndeplinesc condiţiile problemei toţi divizorii lui 16 care au două cifre, adică 16. $\Rightarrow$ restul este egal cu 14.

CLASA a VII-a

1. $E=(a+1)(b+2)(c+3)(d+4)$, unde a, b, c, d sunt numere reale pozitive astfel încât: $ab=2$ şi $cd=27$. Arătaţi că $E\geq 576$

Ioniţă Samuel , Bărcăneşti

Rezolvare:

$$\frac{a+1}{2}\geq\sqrt{a\cdot 1}\Rightarrow a+1\geq 2\sqrt{a}$$
$$\frac{a+2}{2}\geq\sqrt{b\cdot 2}\Rightarrow b+2\geq 2\sqrt{2b}$$
$$\frac{c+3}{2}\geq\sqrt{c\cdot 3}\Rightarrow c+3\geq 2\sqrt{3c}$$
$$\frac{d+4}{2}\geq\sqrt{d\cdot 4}\Rightarrow d+1\geq 2\sqrt{4d}$$

Deci: $E\geq 2^4\cdot\sqrt{2\cdot 3\cdot 4\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d}=2^4\cdot\sqrt{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot 3^3}=2^4\cdot\sqrt{2^4\cdot 3^4}=$
$=2^4\cdot 2^2\cdot 3^2=2^6\cdot 3^2=(2^3\cdot 3)^2=24^2=576$

2. Catetele de lungimi b şi c ale unui triunghi dreptunghic satisfac relaţia: $\sqrt{b^2-6b\sqrt{2}+19}+\sqrt{c^2-4c\sqrt{3}+16}\leq 3$. Determinaţi lungimile laturilor triunghiului.

Valer Pop,O.L.M Neamţ

Rezolvare:Se mai poate scrie: $\sqrt{b^2-6b\sqrt{2}+19}+\sqrt{c^2-4c\sqrt{3}+16}=$ =

$\sqrt{(b-3\sqrt{2})^2+1}+\sqrt{(c-2\sqrt{3})^2+4}$. După cum se vede $\sqrt{(b-3\sqrt{2})^2+1}\geq 1$ şi deci $\sqrt{(b-3\sqrt{2})^2+1}+\sqrt{(c-2\sqrt{3})^2+4}$ ≥3 Comparând cu inegalitatea dată de problemă rezultă că $\sqrt{(b-3\sqrt{2})^2+1}+\sqrt{(c-2\sqrt{3})^2+4}$ =3 de unde se deduce că $b-3\sqrt{2}=0$ şi c-$2\sqrt{3}=0$. Rezolvând aceste ecuaţii rezultă b= $3\sqrt{2}$ şi c= $2\sqrt{3}$ iar ipotenuza a= $\sqrt{30}$.

3. Rezolvati ecuatia:

$$\frac{X+1}{2}+\frac{X+2}{3}+\frac{X+3}{4}+...+\frac{X+2013}{2014}=2013$$

Gh.Crăciun,Ploiesti,

Rezolvare: Daca x=1 $\Rightarrow$ 1+1+1+….+1=2013,suma avand 2013 termeni.

x>1 $\Rightarrow \frac{x+1}{2}>\frac{1+1}{2}$

$\frac{x+2}{3}>\frac{1+2}{3}$

$\frac{x+3}{4}>\frac{1+3}{4}$

.

.

.

$\frac{x+2013}{2014}>\frac{1+2013}{2014}\Rightarrow$ suma fractiilor mai mare ca 2013.

Analog daca x $<1\Rightarrow$ suma fractiilor date este mai mica ca 2013,deci singura solutie este x=1.

4. Determinaţi numărul prim $\overline{bc}$, ştiind că $\sqrt{\overline{abc}}$ este un număr natural.

Valer Pop, O.L.M Bistriţa-Năsăud,

Rezolvare: Numărul $\overline{abc}$ trebuie să fie pătrat perfect. Cum $\sqrt{\overline{abc}}\in N$ rezultă că c este diferit de 3 şi 7 iar cum $\overline{bc}$ este număr prim rezultă că c diferit de 5. Ridicând la pătrat numerele 11; 13; 17; 19, 21; 23; 27; 29 şi 31 vedem că $\overline{bc}\in\{29, 41, 61, 89\}$.

5. Numerele naturale nenule a, b şi numărul real x verifică relaţia $x=\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\sqrt{a}+b}$ Să se arate că $\sqrt{a}-\sqrt{b}=1$.Demonstraţi că x este număr iraţional

Gh.Bumbăcea, Buşteni O.L.M Prahova

Rezolvare:: a) Ridicăm la pătrat şi obţinem $a-\sqrt{b}=\sqrt{a}+b$ sau $a-b-\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ sau $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=0$ sau $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}-1\right)=0$ şi cum $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq 0$ rezultă $\sqrt{a}-\sqrt{b}=1$

b)Avem $\sqrt{a}=\sqrt{b}+1$ şi prin ridicare la pătrat deducem că $a=b+1+2\sqrt{b}$, de unde $\sqrt{b}=\frac{a-b-1}{2}\in$ Q. Dar $b\in N^*$ şi deci $\sqrt{b}\in Q^*$. Aşadar există $n\in N^*$ astfel încât

$b=n^2$ şi deci $a=(n+1)^2$. Avem $\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{n^2+n+1} \\ n^2\langle n^2+n+1\langle (n+1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x\in R-Q$

Clasa a VIII-a

1. Să se arate că $3+ab-2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\geq 0, \forall a,b\in[0,1]$.

Angela Ţigăeru

Rezolvare

Se arată că $3+ab-2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=(1-a)(1-b)+\left(\sqrt{a}-1\right)^2+\left(\sqrt{b}-1\right)^2$ sau că

$3+ab-2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=2\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{ab}-1\right)^2$

---

2. Demonstraţi că dacă *a*, *b* şi *n* sunt numere naturale nenule astfel încât $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=n$,

atunci numărul $A=\underbrace{\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+2}}}}}}_{2014\text{ radicali}}$ este natural.

Lucian Petrescu, Tulcea,O.L.M Bucureşti

Rezolvare

Ridicând la pătrat relaţia din ipoteză obţinem $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=n^2-2\in N$. Putem considera $(a,b)=1$. Fracţia $\frac{a^2+b^2}{ab}$ este ireductibilă , deci $a=b=1$. Obţinem n=2,A=2

---

3. Se consideră triunghiul echilateral *ABC* şi triunghiul *BCD* situate în plane perpendiculare. Fie *M* mijlocul segmentului $[AD]$ şi *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Dacă $DG\perp(MBC)$, demonstraţi că triunghiul *BCD* este dreptunghic isoscel.

Mircea Fianu, O.L.M Bucureşti

Rezolvare

Fie *N* mijlocul segmentului $[BC]$. Punctele *A*, *G* şi *N* sunt coliniare şi $AN\perp BC$ (1)

Cum $DG\perp(MBC)$, rezultă că $DG\perp BC$ (2)

Din (1) şi (2) deducem că $BC\perp(AND)$, deci dreapta *DN* este mediatoare a segmentului $[BC]$, prin urmare, triunghiul *BDC* este isoscel cu $DB=DC$. În triunghiul dreptunghic *AND* avem $NM=\frac{AD}{2}$ (3). Dacă *P* este mijlocul segmentului $[AG]$ şi $\{R\}=DG\cap MN$, atunci $[PM]$ este linie mijlocie în triunghiul *ADG*, de unde deducem că $[GR]$ este linie mijlocie în triunghiul *NPM*, deci *R* este mijlocul segmentului $[MN]$. Cum $DR\perp MN$, rezultă că triunghiul *DMN* este isoscel cu

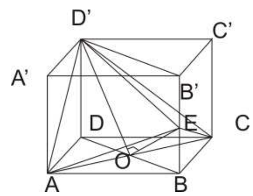
$DN = DM = \frac{AD}{2}$ (4) .Din (3) şi (4) obţinem că triunghiul *MDN* este echilateral.

Triunghiurile *ANC* şi *AND* sunt congruente (C. U.), deci $ND = NC = \frac{BC}{2}$, adică triunghiul *DBC* este dreptunghic în *D*.

4. Se consideră cubul ABCDA'B'C'D'având latura de 12 cm şi punctul E ∈ (BB'). Să se determine lungimea segmentului BE ştiind că planele (D'AC) şi (EAC) sunt perpendiculare.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Rezolvare



Din DD' ⊥ (ABC), DO ⊥ AC rezultă că D'O ⊥ AC şi analog EO ⊥ AC, ceea ce demonstrează că unghiul dintre planele (D'AC) şi (EAC) este ∢D'OE şi cum planele sunt perpendiculare rezultă că m(∢D'OE) = 90°.Se ştie că D'B' = AB$\sqrt{2}$, aşadar D'B' = 12$\sqrt{2}$, DO = $\frac{AB\sqrt{2}}{2}$, prin urmare DO = 6$\sqrt{2}$ şi aplicând teorema lui Pitagora se găseşte:Din Δ D'DO: $D'O^2 = D'D^2 + DO^2$, de unde $D'O^2 = 216$;Din Δ EBO: $EO^2 = EB^2 + BO^2$, aşadar $EO^2 = EB^2 + 72$. Din Δ D'B'E: $D'E^2 = D'B'^2 + B'E^2$, de unde $D'E^2 = 288 + (12 - EB)^2$ şi efectuând calculele se obţine $D'E^2 = 432 - 24\cdot EB + EB^2$ .Din Δ D'OE (m(∢D'OE) = 90°) se obţine $D'E^2 = D'O^2 + EO^2$ adică $432 - 24\cdot EB + EB^2 = 216 + EB^2 + 72$, şi efectuând calculele se obţine EB = 6 cm.

5. Determinaţi numerele reale *x* şi *y* care verifică egalitatea:

$$3(2x^2 - 2x + 1)(3y^2 - 2y + 3) - 4 = 0$$

Ioniţă Samuel , Barcăneşti

Rezolvare:

$$2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$3y^2 - 2y + 3 = 3\left(y^2 - \frac{2}{3}y + 1\right) = 3\left[\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}\right] = 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} \geq \frac{8}{3}$$

Deci:

$$3 \cdot (2x^2 - 2x + 1)(3y^2 - 2y + 3) \geq 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = 4, (\forall)x, y \in \mathbb{R}$$

Egalitatea are loc pentru $x - \frac{1}{2} = 0$ şi $y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ şi $y = \frac{1}{3}$