



## Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2015

Ediția a 14-a

Focșani, Ianuarie 2015

Clasa a 8-a

**Problema 1.** Determinați numerele naturale prime  $p$  și  $q$ ,  $p > q$  știind că

$$p(1 + 3pq) + q(1 - 3pq) = p^3 - q^3.$$

**Problema 2.** Fie  $a, b, c > 0$ . Să se arate că:

(a)  $\frac{a}{4a^2+bc} \leq \frac{1}{8}(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})$ ;

(b)  $\frac{1}{4a^2+bc} + \frac{1}{4b^2+ca} + \frac{1}{4c^2+ab} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})$ .

**Problema 3.** Fie trapezul  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 8$ ,  $BC = 12$ ,  $CD = 4$  și  $m(\hat{B}) = 60^\circ$ . Considerăm punctul  $R \in (CB)$  astfel încât  $CR = 4$  și punctul  $E$  astfel încât  $EA \perp (ABC)$  și  $EA = x$ .

(a) Dacă  $d(E, BC) = 8$ , să se afle  $x$ ;

(b) Să se afle distanța de la punctul  $D$  la planul  $(EAR)$ .

**Problema 4.** Fie tetraedrul  $ABCD$  în care  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$  și  $AB \neq AD$ .

(a) Să se arate că bisectoarele unghiurilor  $\angle BAD$ ,  $\angle BCD$  și dreapta  $BD$  sunt concurente într-un punct  $S$ .

(b) Dacă punctele  $R \in (AB)$ ,  $T \in (AD)$ ,  $V \in (BC)$ ,  $P \in (CD)$  sunt alese astfel încât  $BR = TD$  și  $BV = PD$  iar  $E, O, F$  sunt mijloacele segmentelor  $(RT)$ ,  $(BD)$ , respectiv  $(VP)$ , arătați că planele  $(EOF)$  și  $(ASC)$  sunt paralele.

Timp de lucru 3 ore

Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte



## Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2015

Ediția a 14-a

Focșani, Ianuarie 2015

Clasa a 8-a

**Problema 1.** Determinați numerele naturale prime  $p$  și  $q$ ,  $p > q$  știind că

$$p(1 + 3pq) + q(1 - 3pq) = p^3 - q^3.$$

Cristina și Mihai Vijdeluc

**Soluție**

$$\begin{aligned} p + q &= (p - 1)^3 && \dots\dots\dots \mathbf{3 \text{ puncte}} \\ p - q &= x, \text{ atunci } 2q = (x - 1)x(x + 1), \text{ deci } 3|2q, \text{ deci } q = 3 && \dots\dots\dots \mathbf{3 \text{ puncte}} \\ x = 2 &\text{ deci } p = 5 && \dots\dots\dots \mathbf{1 \text{ punct}} \end{aligned}$$

**Problema 2.** Fie  $a, b, c > 0$ . Să se arate că:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{a}{4a^2+bc} \leq \frac{1}{8} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right); \\ \text{(b)} \quad & \frac{1}{4a^2+bc} + \frac{1}{4b^2+ca} + \frac{1}{4c^2+ab} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Enache Pătrașcu

**Soluție**

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{a}{4a^2+bc} \leq \frac{b+c}{8bc} \Leftrightarrow 8abc \leq 4a^2b + 4a^2c + bc^2 && \dots\dots\dots \mathbf{2 \text{ puncte}} \\ & \Leftrightarrow b(2a - c)^2 + a(2a - b)^2 \geq 0 && \dots\dots\dots \mathbf{2 \text{ puncte}} \\ \text{(b)} \quad & \frac{1}{4a^2+bc} \leq \frac{1}{8} \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} \right), \text{ deci } S \leq \frac{1}{4} \sum \frac{1}{ab} && \dots\dots\dots \mathbf{1 \text{ punct}} \\ \text{Dar } & \sum \frac{1}{ab} \leq \sum \frac{1}{a^2}, \text{ finalizare} && \dots\dots\dots \mathbf{2 \text{ puncte}} \end{aligned}$$

**Problema 3.** Fie trapezul  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 8$ ,  $BC = 12$ ,  $CD = 4$  și  $m(\hat{B}) = 60^\circ$ . Considerăm punctul  $R \in (CB)$  astfel încât  $CR = 4$  și punctul  $E$  astfel

încât  $EA \perp (ABC)$  și  $EA = x$ .

(a) Dacă  $d(E, BC) = 8$ , să se afle  $x$ ;

(b) Să se afle distanța de la punctul  $D$  la planul  $(EAR)$ .

\*\*\*

### Soluție

(a) Dacă  $T$  este piciorul perpendicularei din  $A$  pe  $BC$ , atunci  $AT = 4\sqrt{3}$  .. **2 puncte**  
 $EA = 4$  ..... **2 puncte**

(b)  $d(D, (EAR)) = DR$  ..... **2 puncte**

$DR = 4\sqrt{3}$  ..... **1 punct**

**Problema 4.** Fie tetraedrul  $ABCD$  în care  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$  și  $AB \neq AD$ .

(a) Să se arate că bisectoarele unghiurilor  $\angle BAD$ ,  $\angle BCD$  și dreapta  $BD$  sunt concurente într-un punct  $S$ .

(b) Dacă punctele  $R \in (AB)$ ,  $T \in (AD)$ ,  $V \in (BC)$ ,  $P \in (CD)$  sunt alese astfel încât  $BR = TD$  și  $BV = PD$  iar  $E, O, F$  sunt mijloacele segmentelor  $(RT)$ ,  $(BD)$ , respectiv  $(VP)$ , arătați că planele  $(EOF)$  și  $(ASC)$  sunt paralele.

Enache Pătrașcu, Cornel Noană

### Soluție

Fie  $AS$  bisectoarea unghiului  $BAD$ , atunci  $\frac{SB}{SD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{SB}{SD} = \frac{CB}{CD}$  ..... **1 punct**  
deci  $CS$  este bisectoarea lui  $BCD$  și bisectoarele unghiurilor  $BAD$ ,  $BCD$  și  $BD$  sunt concurente în  $S$  ..... **2 puncte**

(b) Fie  $N$  simetricul lui  $T$  față de  $O$ .  $ON = OD$ ,  $OT = ON$  deci  $BNDT$  paralelogram, deci  $BN \parallel AD$ ,  $BN = AD$ . Deci  $EO$  este linie mijlocie în  $RTN$ , deic  $EO \parallel RN$ , deci  $EO \parallel AS$ . Analog  $EO \parallel SC$ , deci  $(EOS) \parallel (ASC)$  ..... **4 puncte**