Simularea examenului de bacalaureat national 2015
MATEMATICA M_mate-info
Proba E. c)

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acorda 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Să se arate că numărul $z = (1+i)^4 + (1-i)^4$ este real.

5p 2. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 - x - 3 = 0$ să se arate că $x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 8$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $ln(x^2+1) = ln(3x-1)$.

5p 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor un număr par.

5p 5. Fie ABC un triunghi, $M \in [BC]$ cu $MB = \frac{1}{3}BC$. Arătați că $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$.

5p 6. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Să se arate că $\sin B > \cos C$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ din } M_3(\mathbb{R}).$$

5p a) Arătați că A are rangul 3.

5p b) Calculați B^n, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se arate că $A^{2015} = I_3 + 2015 \cdot B + 1007 \cdot 2015 \cdot B^2$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră operația $\bullet$ definită prin $x \bullet y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p a) Arătați că $(\mathbb{R}, \bullet)$ este grup abelian.

5p b) Să se afle $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \bullet x \bullet x = 3\sqrt[3]{3}$.

5p c) Arătați că $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathbb{R}, \bullet)$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Fie $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ pentru orice $x > 0$.

5p a) Calculați $f'(x), x > 0$.

5p b) Dacă $m \in \mathbb{R}$ aflați numărul rădăcinilor reale ale ecuației $\ln x = mx$.

5p c) Arătați că există cel puțin 2015 perechi de numere reale (a, b) cu $a, b > 0, a \neq b$ și $a^b = b^a$.

2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = (x-1) \cdot e^x, F(x) = (x-2) \cdot e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p a) Arătați că F este o primitivă a lui f.

5p b) Calculați $\int_0^1 (x-1)(x-2) \cdot e^{2x} dx$.

5p c) Dacă $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f, arătați că $G(x) \geq G(1)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.