Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a V-a

Subiectul 1

Aflați numerele de forma $\overline{abc}$ care împărțite la $\overline{bc}$ dau câtul 4 și restul $\overline{bc}-8$. (7p)

Subiectul 2

1. Arătați că numărul $A=6^{2015}$ se poate scrie ca diferență de două pătrate perfecte. (4p)

2. Demonstrați că numărul $B=2015+2+6+10+...+4026$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte. (3p)

Subiectul 3

Se consideră numerele $a=8^{222}-3\cdot 4^{332}-2^{663}$ și $b=3^{500}-2\cdot 3^{499}-2\cdot 3^{498}-...-2\cdot 3^{443}-2\cdot 3^{442}$

a) Să se compare numerele a și b. (4p)

b) Să se determine cel mai mic număr p *prim* de două cifre astfel încât $a+b+p$ să se divide cu 10. (3p)

Subiectul 4

Considerăm tabelul format din perechile de numere naturale (7p)

(1,1)
(1,2) (2,1)
(1,3) (2,2) (3,1)
(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)
....

a) Care este perechea din mijlocul rândului al 9-lea?

b) Care este a 1000-a pereche de pe rândul 2010?

c) În câte perechi scrise de la rândul 1 până la rândul 2010 inclusiv, apare numărul 1005?

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

Clasa a VI-a

Problema 1

Unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare, iar măsura primului este de cinci ori mai mare decât măsura celui de-al doilea. Determinaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$.

Problema 2

Mulţimea M este formată din n multipli consecutivi ai lui 4. Suma celui mai mic şi celui mai mare dintre elementele lui M este 8080, iar suma celor mai mari două elemente din M este 16132.

a) Arătaţi că $n = 2015$.

b) Demonstraţi că media aritmetică a tuturor elementelor lui M este element al mulţimii M.

Problema 3

Pe semidreapta $(OB$ se consideră punctele $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ astfel încât $OB = 2$ cm, $OA_1 = 1$ cm şi $A_nA_{n+1} = \frac{1}{2^n}$ cm, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Care este cea mai mare lungime posibilă a segmentului A_1A_{10}? Dar cea mai mică?

b) Arătaţi că, indiferent de modul lor de aşezare (în condiţiile problemei), toate punctele A_n $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ aparţin segmentului (OB).

Problema 4

Determinaţi numărul fracţiilor ireductibile şi subunitare care au suma dintre numărător şi numitor egală cu 2015.

Notă. *Timp de lucru: 2 ore*
Fiecare problemă se notează cu punctaje cuprinse între 0 şi 7.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a VII-a

Subiect 1

Demonstrați că media aritmetică a primelor k numere naturale pare consecutive și cea a primelor k numere naturale impare consecutive sunt numere naturale consecutive, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Subiect 2

a) Demonstrați că dacă m și n sunt numere raționale și $m\sqrt{3}+n\sqrt{2}=0$, atunci $m=0$ și $n=0$.

b) Arătați că $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}=\frac{2}{3}$.

c) Determinați numerele $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{Z}$, astfel încât

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}\right)\cdot a\sqrt{2}+\left[\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}\right]\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{50}}{3}+a\sqrt{12},$$

unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x.

Subiect 3

Se consideră un paralelogram $ABCD$ și se notează cu M, N și O mijloacele segmentelor AD, BC, respectiv AN. Fie $BP \perp CM$, $P \in CM$.

a) Demonstrați că patrulaterul $ANCM$ este paralelogram.

b) Demonstrați că $[AP] \equiv [AB]$.

c) Determinați măsura unghiului BAD, știind că $2OP = AN$.

Subiect 4

În triunghiul oarecare ABC, se consideră M și N mijloacele segmentelor BC, respectiv AM, punctul D simetricul punctului C față de A, $BN \cap AC = \{S\}, DM \cap AB = \{T\}$ și punctul P mijlocul segmentului SC.

a) Demonstrați că $AC = 3PC$.

b) Demonstrați că dreptele ST și BC sunt paralele.

c) Calculați aria triunghiului ANS, știind că aria triunghiului ABC este egală cu $48\ \text{cm}^2$.

Notă *Timp de lucru 3 ore.*
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA a VIII a

Subiect 1

a) Stabiliţi dacă numărul $A=\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{9}{16\cdot 25}+\frac{11}{25\cdot 36}$ aparţine intervalului $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$.

b) Dacă $x, y \in R$, astfel încât $x \in (-2;6)$ şi $y \in (-5;3)$, arătaţi că numărul

$B=\sqrt{(x+y-9)^2}+\sqrt{(x+y+7)^2}$ este pătrat perfect.

Subiect 2

a) Raţionalizaţi fracţia: $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

b) Să se determine $n \in N^*$ astfel încât:

$$\frac{\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=45.$$

Subiect 3

Fie *ABCDA'B'C'D'* o prismă patrulateră regulată cu *AB=6 cm*. Se ştie că *M* este mijlocul lui (*BB'*), *N* este mijlocul lui (*AA'*), iar măsura unghiului dintre dreptele *CM* şi *B'N* este egală cu 60^0.

a) Calculaţi perimetrul triunghiului *AMC*.

b) Determinaţi distanţa de la M la mijlocul segmentului (*AD'*).

c) Să se arate că oricum am considera 9 puncte în interiorul prismei,există două dintre ele aflate la o distanţă de cel mult $3\sqrt{6}$ cm unul faţă de celălalt.

Subiect 4

Pe muchiile $[SA_1],[SA_2],\ldots,[SA_n]$ ale piramidei $SA_1A_2\ldots A_n$ cu baza poligonul $A_1A_2\ldots A_n$ se iau respectiv punctele $B_1, B_2,\ldots,B_n$ astfel încât patrulaterele $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2,\ldots,A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$ să fie inscriptibile. Să se arate că şi patrulaterul $A_1A_nB_nB_1$ este inscriptibil.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA a V-a

BAREM

Subiectul 1 Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$ care împărţite la $\overline{bc}$ dau câtul 4 şi restul $\overline{bc}-8$

Soluţie şi barem

Scrie $\overline{abc} = 4 \cdot \overline{bc} + \overline{bc} - 8$	1 p
$\overline{bc} = 25 \cdot a + 2$	1 p
$25a + 2 < 100 \Rightarrow a < 4$	1 p
$a = 1 \Rightarrow \overline{bc} = 27$	1 p
$a = 2 \Rightarrow \overline{bc} = 52$	1 p
$a = 3 \Rightarrow \overline{bc} = 77$	1 p
$\overline{abc} \in \{127, 252, 377\}$	1 p

Subiectul 2 1. Arătaţi că numărul $A = 6^{2015}$ se poate scrie ca diferenţă de două pătrate perfecte.

2. Demonstraţi că numărul $B = 2015 + 2 + 6 + 10 + \ldots + 4026$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

Soluţie şi barem

1. $A = 6^{2012} \cdot 6^3$	1 p
$A = 6^{2012} \cdot (225 - 9)$	2 p
$A = (15 \cdot 6^{1006})^2 - (3 \cdot 6^{1006})^2$	1 p
2. $B = 2015 + 2 \cdot (1 + 3 + 5 + \cdots + 2013)$	1 p
$B = (1 + 3 + 5 + \cdots + 2013) + (1 + 3 + 5 + \cdots + 2013 + 2015)$	1 p
$B = 1007^2 + 1008^2$	1 p

Subiectul 3 Se consideră numerele $a = 8^{222} - 3 \cdot 4^{332} - 2^{663}$ şi $b = 3^{500} - 2 \cdot 3^{499} - 2 \cdot 3^{498} - \ldots - 2 \cdot 3^{443} - 2 \cdot 3^{442}$

a) Să se compare numerele a şi b.

b) Să se determine cel mai mic număr *p prim* de două cifre astfel încât $a + b + p$ să se dividă cu 10.

Soluție și barem

a) $a = 2^{633}$ 1 p

$b = 3^{500} - (3-1)\cdot 3^{499} - (3-1)\cdot 3^{498} - \dots - (3-1)\cdot 3^{442}$ 1 p

$b = 3^{442}$ 1 p

$a < b$ 1 p

b) $UC(2^{663}) = 8;\quad UC(3^{442}) = 9$ 1 p

$UC(a+b+p) = 0 \Rightarrow \quad U(p) = 3$ 1 p

$p = 13$ 1 p

Subiectul 4 Considerăm tabelul format din perechile de numere naturale

$$
\begin{array}{llll}
(1,1) & & & \\
(1,2) & (2,1) & & \\
(1,3) & (2,2) & (3,1) & \\
(1,4) & (2,3) & (3,2) & (4,1)
\end{array}
$$

....

a) Care este perechea din mijlocul rândului al 9-lea?

b) Care este a 1000-a pereche de pe rândul 2010?

c) În câte perechi scrise de la rândul 1 până la rândul 2010 inclusiv, apare numărul 1005?

Soluție și barem

a) Scrie al 9-lea rând:

$(1,9); (2,8); (3,7); (4,6); (5,5); (6,4); (7,3); (8,2); (9,1)$ 1 p

Perechea este (5,5)

b) Scrie rândul 2010

$(1,2010), (2,2009), (3,2008), (4,2007), (5,2006), \dots, (1000,1011), \dots, (2010,1)$ 1 p

Perechea cerută este (1000,1011) 1 p

c) Rândul 1005

$(1,1005), (2,1004), (3,1003), \dots, (1005,1), (1004,2) \dots \Rightarrow$ 2 perechi

Rândul 1006

$(1,1006), (2,1005), (3,1004), \dots, (1005,2), (1006,1) \dots \Rightarrow$ 2 perechi

Rândul 1007

$(1,1007), (2,1006), (3,1005), \dots, (1005,3), (1006,2), (1007,1) \Rightarrow$ 2 perechi

1 p

....

Rândul 2009

$(1,2009),(2,2008),(3,2007),\ldots,(1005,1005),(1006,1004),\ldots,(2009,1) \Rightarrow 1$ pereche 1p

Rândul 2010

$(1,2010),(2,2009),(3,2008),\ldots,(1005,1006),(1006,1005),(1007,1004),\ldots,(2010,1)$
$\Rightarrow 2$ perechi 1p

Numărul 1005 apare în:

$(2010-1004):2-1=1006\cdot 2-1=2012-1=2011$ *perechi* 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

Clasa a VI-a Barem de corectare –

Problema 1. Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare, iar măsura primului este de cinci ori mai mare decât măsura celui de-al doilea. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$.

Soluție și barem

Dacă unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente, măsura unghiului format de bisectoarele lor este de 90°. 2p

$m(\sphericalangle AOB)=150^\circ$ și $m(\sphericalangle BOC)=30^\circ$ 2p

Dacă unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt neadiacente, măsura unghiului format de bisectoarele lor este de 60°. 3p

Problema 2. Mulțimea M este formată din n multipli consecutivi ai lui 4. Suma celui mai mic și celui mai mare dintre elementele lui M este 8080, iar suma celor mai mari două elemente din M este 16132.

a) Arătați că $n=2015$.

b) Demonstrați că media aritmetică a tuturor elementelor lui M este element al mulțimii M.

Soluție și barem

a) Dacă b este cel mai mare element al lui M, atunci $(b-4)+b=16132$, de unde $b=8068$. 2p

Cel mai mic element din M va fi $a=12$ și atunci $n=(8068-12):4+1=2015$. 2p

b) Suma elementelor lui M este $(a+b)\cdot n:2=4040n$, deci media aritmetică a elementelor lui M este $4040n:n=4040$. 2p

Numărul 4040 se divide cu 4 și este cuprins între a și b, deci este element al mulțimii M. 1p

Problema 3. Pe semidreapta $(OB$ se consideră punctele $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ astfel încât $OB = 2\text{ cm}$, $OA_1 = 1\text{ cm}$ și $A_nA_{n+1} = \frac{1}{2^n}\text{cm}$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Care este cea mai mare lungime posibilă a segmentului A_1A_{10}? Dar cea mai mică?

b) Arătați că, indiferent de modul lor de așezare (în condițiile problemei), toate punctele A_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ aparțin segmentului (OB).

Soluție și barem

a) $(A_1A_{10})_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^9} = 1 - \frac{1}{2^9} = \frac{511}{512}\text{cm}$ 2p

$(A_1A_{10})_{\min} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^9}\right) = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}\text{cm}$ 2p

b) Punctul A_1 este mijlocul segmentului (OB). Trebuie arătat că, indiferent de modul de așezare a punctelor (în condițiile problemei), lungimea maximă a segmentului A_1A_n este mai mică de 1cm (unde n este oarecare). 2p

$A_1A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1\text{cm}$ 1p

Problema 4.. Determinați numărul fracțiilor ireductibile și subunitare care au suma dintre numărător și numitor egală cu 2015.

Soluția 1 și barem

Vom afla mai întâi numărul fracțiilor reductibile și subunitare care au suma dintre numărător și numitor egală cu 2015; notăm cu M mulțimea acestor fracții. Elementele lui M sunt de forma $\frac{a}{2015-a}$, unde $a \in \{1, 2, ..., 1007\}$ și fie $d \geq 2$ un număr prin care se simplifică o astfel de fracție. Din $d \mid a$ și $d \mid 2015 - a$ deducem că $d \mid 2015$. Observăm că $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. 3p

Notăm cu A, B și C submulțimile lui M formate din fracțiile care se simplifică prin 5, 13 respectiv 31. Trebuie să determinăm $|A \cup B \cup C|$. Avem (folosind, eventual, o diagramă): $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 201 + 77 + 32 - 15 - 6 - 2 + 0 = 287$ 3p

Numărul fracțiilor ireductibile și subunitare care au suma dintre numărător și numitor egală cu 2015 este $|M| - |A \cup B \cup C| = 1007 - 287 = 720$. 1p

Soluția 2 și barem

Fie $\frac{a}{b}$ o fracție ireductibilă, având suma dintre numărător și numitor egală cu 2015. Din $(a,b)=1$ rezultă că $(a,a+b)=1$, adică $(a,2015)=1$. Observăm că $2015=5\cdot 13\cdot 31$. 3p

Numărul numerelor naturale mai mici ca 2015 și relativ prime cu 2015 este dat de indicatorul lui Euler:

$\varphi(2015)=2015\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\left(1-\frac{1}{31}\right)=1440$, deci există 1440 fracții ireductibile care au suma dintre numărător și numitor egală cu 2015. .... 3p

Dintre acestea, jumătate sunt subunitare și jumătate sunt supraunitare, deci numărul fracțiilor cerute în enunț este $1440:2=720$. 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

Clasa a VII-a

Barem

Subiect 1 Demonstrați că media aritmetică a primelor k numere naturale pare consecutive și cea a primelor k numere naturale impare consecutive sunt numere naturale consecutive, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Popa Claudiu- Ștefan

Soluție și barem

Primele k numere naturale pare consecutive sunt: $0, 2, 4, ..., 2\cdot(k-1)$ 1p

$0+2+4+......+2\cdot(k-1)=k\cdot(k-1) \Rightarrow \dfrac{0+2+.....+2\cdot(k-1)}{k}=k-1$ 2p

Primele k numere naturale impare consecutive sunt: $1, 3, 5, ..., 2k-1$ 1p

$1+3+5+.......+(2k-1)=k^2 \Rightarrow \dfrac{1+3+......+(2k-1)}{k}=k$ 2p

$k-1$ și k sunt numere naturale consecutive..1p

Subiect 2 a) Demonstrați că dacă m şi n sunt numere raționale și $m\sqrt{3}+n\sqrt{2}=0$, atunci $m=0$ şi $n=0$.

b) Arătați că $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}=\dfrac{2}{3}$.

c) Determinați numerele $a \in \mathbb{Q}$ şi $b \in \mathbb{Z}$,, astfel încât

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}\right)\cdot a\sqrt{2}+\left[\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}\right]\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{50}}{3}+a\sqrt{12},$$

unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x.

Anița Alice

Soluție și barem

a) $m\sqrt{3}+n\sqrt{2}=0 \,|\cdot\sqrt{2} \Leftrightarrow m\sqrt{6}+2n=0 \Leftrightarrow m\sqrt{6}=-2n$ 1p

$\left.\begin{array}{l}\text{Dacă } m\neq 0, \text{ atunci } \sqrt{6}=-\dfrac{2n}{m} \text{ ar fi număr rațional (fals)}\\ \text{Dacă } m=0, \text{ atunci } n=0\end{array}\right\}$ 1p

b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{72}}-\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}}$ 1p

$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{9}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 1p

c) Folosind b), egalitatea din enunț se mai scrie $\frac{2a\sqrt{2}}{3}+\left[\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}\right]\cdot\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{2}}{3}+2a\sqrt{3}$ 1p

$\left(\frac{2a}{3}-\frac{5}{3}\right)\sqrt{2}+\left(\left[\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}\right]-2a\right)\sqrt{3}\overset{a)}{=}0\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{2}\\ \left[\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}\right]=5\end{cases}$ 1p

$5\le\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}<6\Leftrightarrow 10\le\sqrt{b^2+20}<12\Leftrightarrow 100\le b^2+20<144\Leftrightarrow 80\le b^2<124$

$\Leftrightarrow b^2\in\{81,100,121\}\Leftrightarrow b\in\{\pm 9,\pm 10,\pm 11\}$ 1p

Subiect 3 Considerăm un paralelogram $ABCD$ și notăm cu M, N și O mijloacele segmentelor AD, BC, respectiv AN. Fie $BP\perp CM$, $P\in CM$.

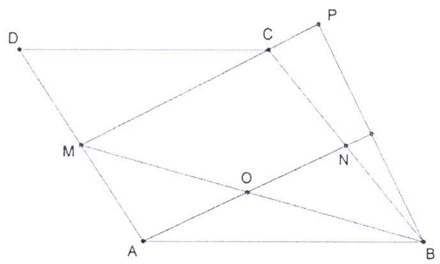
a) Arătați că patrulaterul $ANCM$ este paralelogram.

b) Demonstrați că $[AP]\equiv[AB]$.

c) Determinați măsura unghiului BAD, știind că $2OP=AN$.

Zanoschi Adrian

Soluție și barem



a) Deoarece $ABCD$ este paralelogram rezultă că $AD\parallel BC$ și $AD=BC$, deci $AM\parallel CN$ și $AM=CN$, de unde reiese că $ANCM$ este paralelogram....................3p

b) Cum $AN\parallel MP$ (căci $ANCM$ este paralelogram) și $MP\perp BP$ rezultă că $AN\perp BP$. Pe de altă parte, din relațiile $AN\parallel CP$ și $BN=NC$ rezultă că dreapta AN trece prin mijlocul segmentului BP. Prin urmare, AN este mediană și înălțime în triunghiul ABP, cea ce înseamnă că $[AP]\equiv[AB]$ 2p

c) Întrucât $AMNB$ este paralelogram, punctul O este și mijlocul segmentului BM, deci PO este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic BMP. Astfel, $2OP = MB$ și, cum $2OP = AN$, rezultă că $MB = AN$, deci $AMNB$ este dreptunghi. Așadar, $m(\angle BAD) = m(\angle BAM) = 90^\circ$ 2p

Subiect 4 În triunghiul oarecare ABC, se consideră M și N mijloacele segmentelor BC, respectiv AM, punctul D simetricul punctului C față de A, $BN \cap AC = \{S\}, DM \cap AB = \{T\}$ și punctul P mijlocul segmentului SC.

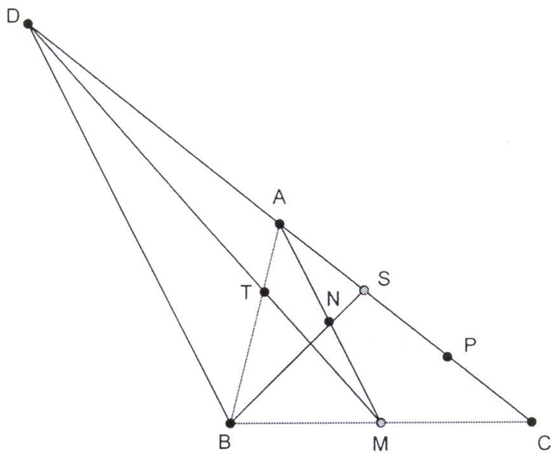
a) Arătați că $AC = 3PC$.

b) Demonstrați că dreptele ST și BC sunt paralele.

c) Calculați aria triunghiului ANS, știind că aria triunghiului ABC este egală cu 48 cm^2.

Anița Alice

Soluție și barem



a) Întrucât în ΔSBC, $[MP]$ este linie mijlocie rezultă că $MP \parallel BS$..1p

Din t.r. a teoremei liniei mijlocii aplicată în ΔAMP se obține că punctul S este mijlocul segmentului AP.

Prin urmare, rezultă $AS = SP = PC = \frac{AC}{3}$, deci $AC = 3 \cdot PC$ 1p

b) În ΔDBC, $[DM]$, $[BA]$ sunt mediane și $DM \cap BA = \{T\} \Rightarrow T$ este centru de greutate..............................1p

Se obține $\frac{AT}{AB} = \frac{1}{3}$, iar din a) rezultă $\frac{AS}{AC} = \frac{1}{3}$ 1p

Cum $\frac{AT}{AB} = \frac{AS}{AC}$, din t.r. a teoremei lui Thales se obține $ST \parallel BC$..1p

c) Dacă $AS = a \Rightarrow SC = 2a$, $AD = 3a$.

Deoarece $[AM]$ este linie mijlocie în ΔDBC rezultă $AM \parallel BD$, ceea ce înseamnă că $AN \parallel BD$.

Aplicând teorema lui Thales în ΔSBD se obține $\frac{SN}{SB} = \frac{SA}{SD} = \frac{1}{4}$, deci $\frac{A_{\Delta ANS}}{A_{\Delta ABS}} = \frac{1}{4}$ (1) 1p

Deoarece $\frac{AS}{AC}=\frac{1}{3}$, rezultă $\frac{A_{\Delta ABS}}{A_{\Delta ABC}}=\frac{1}{3}$ (2)

Înmulțind egalitățile (1) și (2) obținem $\frac{A_{\Delta ANS}}{A_{\Delta ABC}}=\frac{1}{12}$, deci $A_{\Delta ANS}=4\text{ cm}^2$ 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

Clasa a VIII a

BAREM

Subiect 1 a) Stabiliți dacă numărul $A=\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{9}{16\cdot 25}+\frac{11}{25\cdot 36}$ aparține intervalului $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$.

b) Dacă $x,y\in R$ astfel încât $x\in(-2;6)$ și $y\in(-5;3)$, arătati că numărul $B=\sqrt{(x+y-9)^2}+\sqrt{(x+y+7)^2}$ este pătrat perfect.

Soluție și barem

a) Utilizând $\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}$, obține: $A=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}=\frac{2}{9}$ *2p*

Arată $\frac{2}{9}\in\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$ *1p*

b) Obține $B=|x+y-9|+|x+y+7|$ *1p*

Din $x<6$ și $y<3\Rightarrow |x+y-9|=9-x-y$ *1p*

Din $x>-2$ și $y>-5\Rightarrow |x+y+7|=x+y+7$ *1p*

Finalizare $B=16$, pătrat perfect..................*1p*

Subiect 2 a) Raționalizați fracția: $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

b) Să se determine $n\in N^*$ astfel încât:

$$\frac{\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=45.$$

Prof. Cătălin Budeanu

Soluție și barem

a) Prin amplificare cu $\sqrt{3}-(\sqrt{2}+1)$ obține

$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)}{-2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{2}$ *2p*

b) $\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}-1)}{-2\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{k}+1-\sqrt{k+1}}{2}$ *1p*

Suma din membrul stâng este egală cu $\frac{1}{2}\cdot\left(n+1-\sqrt{n+1}\right)$ *2p*

Egalează rezultatul cu 45 și obține $\sqrt{n+1} \in \{-9;10\}$ 1p

Finalizare: n=99.. 1p

Subiect 3 Fie *ABCDA'B'C'D'* o prismă patrulateră regulată cu *AB=6 cm*. Se știe că *M* este mijlocul lui (*BB'*), *N* este mijlocul lui (*AA'*), iar măsura unghiului dintre dreptele *CM* și *B'N* este egală cu 60^0.

a) Calculați perimetrul triunghiului *AMC*.

b) Determinați distanța de la M la mijlocul segmentului (*AD'*).

c) Să se arate că oricum am considera 9 puncte în interiorul prismei, există două dintre ele aflate la o distanță de cel mult $3\sqrt{6}$ cm unul față de celălalt.

Soluție și barem

a) $AM \parallel B'N \Rightarrow m(\sphericalangle AMC) = 60^0$ 1p

ΔAMC echilateral și $P_{AMC} = 3 \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ cm.. 2p

b) Fie Q mijlocul lui (AD').Arata că $\Delta AMD'$ este dreptunghic.. 1p

MQ mediană deci $MQ = \dfrac{AD'}{2} = 3\sqrt{5}$ cm.. 1p

c) Împarte prisma în 8 prisme având dimensiunile de 3, 3, 6 și diagonala egala cu $3\sqrt{6}$ 1p

Aplică principiul cutiei și finalizează.. 1p

Subiect 4 Pe muchiile $[SA_1],[SA_2],...,[SA_n]$ ale piramidei $SA_1A_2...A_n$ cu baza poligonul $A_1A_2...A_n$ se iau respectiv punctele $B_1, B_2, ..., B_n$ astfel încât patrulaterele $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, ..., A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$ să fie inscriptibile. Să se arate că și patrulaterul $A_1A_nB_nB_1$ este inscriptibil.

Prof. T.Superceanu

Soluție și barem

$A_1A_2B_2B_1$ inscriptibil $\Rightarrow \Delta SA_1A_2 \sim \Delta SB_2B_1 \Rightarrow SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2$ 2p

Analog obține $SA_2 \cdot SB_2 = SA_3 \cdot SB_3 = ... = SA_n \cdot SB_n$ 2p

Deduce $SA_1 \cdot SB_1 = SA_n \cdot SB_n$ care implică $\dfrac{SA_1}{SB_n} = \dfrac{SA_n}{SB_1}$ 1p

Demonstrează că $\Delta SA_1A_n \sim \Delta SB_nB_1$ 1p

Finalizează obținând că patrulaterul $A_1A_nB_nB_1$ este inscriptibil.. 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.