Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA A IX A

Problema 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x^2 - 3x + 2| = \left|\left|x - \frac{1}{3}\right| - \frac{2}{3}\right|, \quad x \in \mathbb{R}$;

b) $\left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n^2 - n}{3}\right] = n, n \in \mathbb{Z}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

Problema 2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, a > 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$. Dacă $x_1 = x_{n+1}$, arătați că:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \geq \frac{a}{2}$$

Problema 3. Fie $\triangle ABC$ cu G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}$

b) $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c) \cdot \overrightarrow{MI}$, cu notațiile $a = BC, b = AC, c = AB$.

c) Dacă $\vec{v} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$ și $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$, să se arate că vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$ sunt coliniari și $3 \cdot |\vec{v}| = (a+b+c) \cdot |\vec{u}|$

Problema 4. Pe laturile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P și respectiv Q.

a) Arătați că $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$ este coliniar cu $\overrightarrow{BD}$.

b) Indicați 4 puncte M, N, P, Q pentru care echivalența de la punctul a) are loc.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a X-a

Subiectul 1.

a) Calculați $(\sqrt{5}-1)^3$.

b) Determinați câte numere naturale nenule n verifică inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}<1-2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Subiectul 2.

Dacă $a_k \in (0,1)$, $k=\overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați inegalitatea:

$$\log_{a_1}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\log_{a_2}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\ldots+\log_{a_n}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\geq n.$$

Subiectul 3.

a) Dacă $a, z, z' \in \mathbb{C}$, arătați că $|z+a|+|z'+a|\geq|z-z'|$.

b) Dacă $a, z \in \mathbb{C}, |z|=1, n\in\mathbb{N}^*$, arătați că $\sum_{k=1}^{2n}\left|z^k+a\right|\geq n|z-1|$.

Subiectul 4.

Fie A un punct al cercului cu centrul în originea reperului cartezian xOy și de rază 1, astfel încât

$$\mu\left(\widehat{xOA}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

a) Determinați ecuația binomă de grad minim, având coeficienți reali, pentru care una dintre rădăcini să fie afixul punctului A;

b) Aflați aria poligonului cu vârfurile A_k, unde A_k sunt imaginile geometrice ale ecuației de la punctul a).

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a XI-a

Subiect 1

Determinați numerele reale a și b astfel încât: $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-x+a}-b}{x-2}=\frac{3}{4}$.

Subiect 2

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n, n\in N, x_0=0, x_1=1$

a) Arătați că $A^n=\begin{pmatrix}x_{n-1} & x_n\\ x_n & x_{n+1}\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in N^*$.

b) Arătați, folosind eventual punctul a), că $x_{n+1}x_{n-1}-x_n{}^2=(-1)^n$, pentru orice $n\in N^*$.

Subiect 3

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ și $C(A)=\{X\in M_3(C) / A\cdot X=X\cdot A\}$

a) Arătați că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b,c\in C$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că ecuația $X^3=O_3$ are o infinitate de soluții în $M_3(C)$.

c) Arătați că ecuația $X^3=A$ nu are soluții în $M_3(C)$.

Subiect 4

Considerăm șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ si propozițiile :

(P_1) Șirul $x_n=a_{n+1}-a_n, n\in N^*$ este convergent la zero.

(P_2) Șirul $y_n=\max(a_n,a_{n+1}), n\in N^*$ este convergent

(P_3) Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Arătaţi că:

a) P_1 nu implică P_3

b) P_2 nu implică P_3

c) P_1 şi P_2 implică P_3.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA A XII-A

Problema 1

Fie funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1+\sin x-\cos x}{x+e^{x+2015}+\sin x}$. Determinaţi primitiva $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f, ştiind că $F(0)=1$.

Problema 2

Pe intervalul $G_a=(a,+\infty)$ cu $a\in\mathbb{R}$, se defineşte legea de compoziţie $*$: $G_a\times G_a\to G_a$ prin $x*y=xy-ax-ay+a^2+a$.

a) Demonstraţi că $(G_a,*)$ este grup abelian.

b) Demonstraţi că oricare ar fi numărul real a, grupul $(G_a,*)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ al numerelor reale pozitive în raport cu înmulţirea.

c) Calculaţi $x_*^n=\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n\text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 3

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu n elemente, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Dacă funcţiile $f_k:G\to G$, $f(x)=x^k, k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ sunt automorfisme ale grupului $(G,\cdot)$, demonstraţi că n este număr prim.

Problema 4

Determinaţi funcţiile derivabile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ care îndeplinesc simultan următoarele condiţii:

(1) derivata f' este continuă şi $0<f'(x)\leq 1$, oricare ar fi $x\in[0,1]$;

(2) $f(0)=0$

şi

(3) pentru o primitivă F a funcţiei f^2 cu $F(0)=0$, avem $F(1)=\dfrac{f^3(1)}{3}$.

***Notă**: Timp de lucru: 3 ore. Pentru fiecare problemă se acordă de la 0 la 7 puncte .*

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA A IX A

Problema 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x^2-3x+2| = \left|\left|x-\frac{1}{3}\right|-\frac{2}{3}\right|$, $x\in\mathbb{R}$;

b) $\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n^2-n}{3}\right]=n,\ n\in\mathbb{Z}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

Soluție și barem

a) Prelucrând ecuația se obține:

1. $x^2-3x+\frac{8}{3}-\left|x-\frac{1}{3}\right|=0$ sau 2. $x^2-3x+\frac{4}{3}+\left|x-\frac{1}{3}\right|=0$ 1p

Dacă $x<\frac{1}{3}$ atunci, din 1. rezultă ecuația $3x^2-6x+7=0$ care nu are soluții reale, iar din 2. Rezultă ecuația $3x^2-12x+5=0$ cu soluțiile $x_1=\frac{6+\sqrt{21}}{3}$ și $x_2=\frac{6-\sqrt{21}}{3}$ ambele mai mari decât $\frac{1}{3}$. 1p

Dacă $x>\frac{1}{3}$ atunci, din 1. rezultă ecuația $x^2-4x+3=0$ cu soluțiile $x_1=1$ și $x_2=3$, iar din 2. Rezultă ecuația $x^2-2x+1=0$ cu soluțiile $x_1=x_2=1>\frac{1}{3}$ ..

Așadar, mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{1,3\}$ 1p

b)

$$\left[\frac{n-1}{2}\right]=k \Leftrightarrow k\le\frac{n-1}{2}<k+1 \Rightarrow 2k\le n-1<2k+2 \Rightarrow 2k+1\le n<2k+3 \Rightarrow n\in\{2k+1,2k+2\}$$ 1p

Dacă $n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}$:

$$k+\left[\frac{n^2-n}{3}\right]=2k+1 \Leftrightarrow \left[\frac{(2k+1)^2-(2k+1)}{3}\right]=k+1 \Leftrightarrow \left[\frac{(2k+1)(2k)}{3}\right]=k+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k+1\le\frac{2k(2k+1)}{3}<k+2 \Leftrightarrow 3k+3\le 4k^2+2k<3k+6 \,\Big|-(3k+3)$$

$0\le 4k^2-k-3<3$, $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4k^2-k-3\in\mathbb{Z}$. Analizăm situațiile:

$$4k^2-k-3=0\Rightarrow k_1=\frac{1-7}{8}\notin\mathbb{Z},\ k_2=\frac{1+7}{8}=1\in\mathbb{Z}$$

$4k^2-k-3=1 \Rightarrow 4k^2-k-4=0, \Delta=65 \neq$ pp

$4k^2-k-3=2 \Rightarrow k_1=\frac{1-9}{8}=-1, k_2=\frac{1+9}{8} \notin \mathbb{Z}$

$k \in \{-1,1\} \Rightarrow n \in \{-1,3\}$ 2p

Dacă $n=2k+2, k \in \mathbb{Z}$:

$$k+\left[\frac{n(n-1)}{3}\right]=2k+2 \Leftrightarrow \left[\frac{(2k+2)(2k+1)}{3}\right]=k+2 \Leftrightarrow k+2 \leq \frac{4k^2+6k+2}{3} < k+3 \Leftrightarrow$$

$3k+6 \leq 4k^2+6k+2 < 3k+9 \big| -3k-6 \Leftrightarrow 0 \leq 4k^2+3k-4<3$. Analizăm situațiile:

$4k^2+3k-4=0 \Rightarrow \Delta=73 \neq pp$

$4k^2+3k-4=1 \Rightarrow \Delta=89 \neq pp$

$4k^2+3k-4=2 \Rightarrow \Delta=105 \neq pp$. Nu avem soluții în acest caz. 1p

Problema 2. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n, a > 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$. Dacă $x_1 = x_{n+1}$, arătați că:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{x_i^2+x_{i+1}^2} \geq \frac{a}{2}$$

Soluție și barem

Avem

$\frac{x_i^2+x_{i+1}^2}{2} \geq x_i x_{i+1} \Leftrightarrow \frac{x_i x_{i+1}}{x_i^2+x_{i+1}^2} \leq \frac{1}{2}$ .... 2p.

$\Rightarrow \frac{x_i^3}{x_i^2+x_{i+1}^2} = x_i - x_{i+1}\frac{x_i x_{i+1}}{x_i^2+x_{i+1}^2} \geq x_i - \frac{x_{i+1}}{2}$ 2p

Adunând relațiile pentru $i=1,2,\dots,n$ obținem

$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{x_i^2+x_{i+1}^2} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2} = \frac{a}{2}$ .... 3p.

Problema 3. Fie $\triangle ABC$ cu G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\cdot\overrightarrow{MG}$

b) $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\cdot\overrightarrow{MI}$, cu notațiile $a=BC, b=AC, c=AB$.

c) Dacă $\vec{v} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$ și $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$, să se arate că vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$ sunt coliniari și

$3 \cdot |\vec{v}| = (a+b+c) \cdot |\vec{u}|$

Soluție și barem

a) Fie D mijlocul lui (BC) $\Rightarrow \overrightarrow{MD} = \dfrac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{2}$. Dacă G este centrul de greutate $\Rightarrow \dfrac{\overline{GA}}{\overline{GD}} = -2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{1+2}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{1+2}\overrightarrow{MD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \text{.................................2p}$$

b) Fie $[AE$ și $[BF$ bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$ și $\widehat{B}$, $E \in (BC), F \in (AC)$.

Din teorema bisectoarei $\Rightarrow \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{BA}{AC} = \dfrac{c}{b}$ și $\Rightarrow \dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = -\dfrac{c}{b}$;

$I \in (AE)$, $(BI$ bisectoarea unghiului $\widehat{B}$ $\Rightarrow \dfrac{\overline{IA}}{\overline{IE}} = -\dfrac{c(b+c)}{ac} = -\dfrac{b+c}{a}$

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{1+\frac{c}{b}}\overrightarrow{MB} + \frac{\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}}\overrightarrow{MC} = \frac{b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}}{b+c}$$

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{1+\frac{b+c}{a}}\overrightarrow{MA} + \frac{\frac{b+c}{a}}{1+\frac{b+c}{a}}\overrightarrow{ME} = \frac{a\overrightarrow{MA}}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}}{b+c} = \frac{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}}{a+b+c} \text{............ 2p}$$

c) Dacă în b) considerăm $M = G$ atunci $\vec{v} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = (a+b+c)\cdot\overrightarrow{GI}$

Dacă în a) considerăm $M =$ I atunci $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\cdot\overrightarrow{IG}$.

Observăm că $\overrightarrow{GI} = -\dfrac{1}{3}\vec{u} \Rightarrow \vec{v} = (a+b+c)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\vec{u}\right) = -\dfrac{a+b+c}{3}\vec{u} \Rightarrow$ vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$ sunt coliniari.

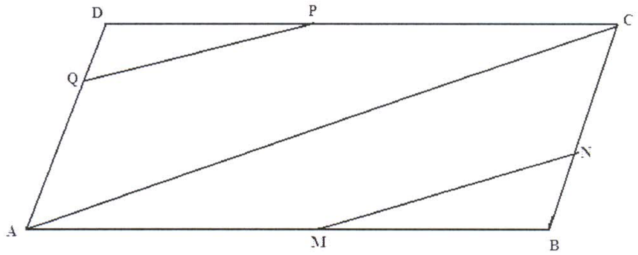
$$|\vec{v}| = \left|\frac{a+b+c}{3}\right|\cdot|\vec{u}| \Leftrightarrow 3|\vec{v}| = (a+b+c)\cdot|\vec{u}| \text{...3p}$$

Problema 4. Pe laturile $[AB],[BC],[CD],[DA]$ ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P și respectiv Q.

a) Arătați că $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$ este coliniar cu $\overrightarrow{BD}$.

b) Indicați 4 puncte M, N, P, Q pentru care echivalența de la punctul a) are loc.

Soluție și barem



$$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\ \overrightarrow{BC}=\vec{v},\ \frac{AM}{AB}=a,\ \frac{BN}{BC}=b,\ \frac{CP}{CD}=c,\ \frac{DQ}{DA}=d$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)+\overrightarrow{BN}=\left(\vec{u}-a\cdot\vec{u}\right)+b\cdot\vec{v}=(1-a)\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$$

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DP}=+d\vec{v}+\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{PC}\right)=+d\vec{v}+\left(\vec{u}-\vec{u}c\right)=(1-c)\cdot\vec{u}+d\cdot\vec{v}$$

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\vec{u}(2-a-c)+\vec{v}(b+d)$ 2p

$\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$ 1p

$\frac{2-a-c}{1}=\frac{b+d}{1}\Rightarrow 2=a+b+c+d$ 1p

Analog, $\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MQ}$ coliniar cu $\overrightarrow{BD}$ $\Leftrightarrow 2=a+b+c+d$

a) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}$ coliniar cu $\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow a+b+c+d=2\Leftrightarrow \overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MQ}$ coliniar cu $\overrightarrow{BD}$ 2p

b) Putem considera mijloacele laturilor $[AB],[BC],[CD],[DA]$. 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.

Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

Clasa a X-a

Subiectul 1.

a) Calculaţi $(\sqrt{5}-1)^3$.

b) Determinaţi câte numere naturale nenule n verifică inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}<1-2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Soluţie şi barem

a) $(\sqrt{5}-1)^3=8\sqrt{5}-16$.. 1p

b) Se amplifică fiecare fracţie din membrul stâng cu expresia conjugată şi după reducerea termenilor se obţine inegalitatea : $\sqrt[3]{n+1}-1<1-2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$..2p

Din a) inegalitatea se mai poate scrie : $\sqrt[3]{n+1}<1+\sqrt{5}$ 1p

Prin ridicare la cub urmează că $n<15+8\sqrt{5}$..1p

Cum $15+8\sqrt{5}\in(32,33)\Rightarrow n\in\{1,2,\ldots,32\}$, deci sunt 32 numere...2p

Subiectul 2. Dacă $a_k\in(0,1)$, $k=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, demonstraţi inegalitatea:

$$\log_{a_1}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\log_{a_2}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\ldots+\log_{a_n}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\geq n.$$

Soluţie şi barem

Se aplică inegalitatea dintre media armonică şi media geometrică obţinându-se n inegalităţi:

$$\log_{a_i}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\geq\log_{a_i}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\frac{\log_{a_i}(a_1a_2\ldots a_n)}{n},\ i=\overline{1,n}$$ 2p

Prin adunare membru cu membru se obţine:

$$\log_{a_1}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}+\log_{a_2}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}+\ldots+\log_{a_n}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\geq$$

$$\frac{n+(\log_{a_1}a_2+\log_{a_2}a_1)+\cdots+(\log_{a_n}a_{n-1}+\log_{a_{n-1}}a_n)}{n}$$ 2p

Aplicând inegalitatea $\log_{a_i}a_j+\log_{a_j}a_i\geq 2$ pentru toate parantezele din expresia anterioară se obţine

$$\log_{a_1}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}+\log_{a_2}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}+\ldots+\log_{a_n}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

$\geq\frac{n+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 2+\cdots+2}{n}$ şi în continuare rezultă inegalitatea cerută..2p

Semnul „=” are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 1p

Subiectul 3. a) Dacă $a, z, z' \in \mathbb{C}$, arătați că $|z+a|+|z'+a| \ge |z-z'|$.

b) Dacă $a, z \in \mathbb{C}, |z|=1, n \in \mathbb{N}^*$, arătați că $\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \ge n|z-1|$.

Soluție și barem

a) $|z| = |-z| \Rightarrow |z+a|+|z'+a| \ge |z+a|+|-z'-a|$ 2p

$|z+a|+|z'+a| \ge |z+a-z'-a| = |z-z'|$ 1p

b) $\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| = |z^{2n}+a| + |z^{2n-1}+a| + \dots + |z^2+a| + |z+a|$ 1p

$\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \ge |z^{2n} - z^{2n-1}| + \dots + |z^2 - z|$ 1p

$\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \ge \left(|z^{2n-1}| + |z^{2n-3}| + \dots + |z|\right)|z-1| = n|z-1|$ 2p

Subiectul 4. Fie A un punct al cercului cu centrul în originea reperului cartezian xOy și de rază 1, astfel încât $\mu\left(\widehat{xOA}\right) = \frac{\pi}{6}$.

a) Determinați ecuația binomă de grad minim, având coeficienți reali, pentru care una dintre rădăcini să fie afixul punctului A;

b) Aflați aria poligonului cu vârfurile A_k, unde A_k sunt imaginile geometrice ale ecuației de la punctul a).

Soluție și barem

a) $A(a)$ și $z^n = b,\ a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. $a = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ și $a^n = b$ 1p

$\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6} = b \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin\frac{n\pi}{6} = 0 \Rightarrow n = 6k, k \in \mathbb{N}^*$ 2p

$n = 6$, $b = -1$, deci ecuația este $z^6 + 1 = 0$ 1p

b) $A_k(z_k)$, $z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}$, $k = \overline{0,5}$, $A_0A_1 \dots A_5$ hexagon regulat 1p

$\mathcal{A}[A_0A_1 \dots A_5] = 6\mathcal{A}[OA_0A_1] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a XI-a Barem

Subiectul 1 Determinați numerele reale a și b astfel încât: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+a}-b}{x-2}=\dfrac{3}{4}$.

Soluție și barem

Dacă $\sqrt{2+a}-b>0$, $\lim\limits_{x\nearrow 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+a}-b}{x-2}=-\infty$ si $\lim\limits_{x\searrow 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+a}-b}{x-2}=\infty$.

Nu există limita dată, contradicție. Analog pentru $\sqrt{2+a}-b<0$.Rezultă $\sqrt{2+a}-b=0$.

Pentru $b=\sqrt{2+a}$,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-x+a}-\sqrt{2+a}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)(\sqrt{x^2-x+a}+\sqrt{2+a})}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+a}+\sqrt{2+a}}=\frac{3}{2\sqrt{2+a}}$$

Deci $\sqrt{2+a}=2\to a=2$. În concluzie $a=2$, $b=2$.

$\sqrt{2+a}$ - $b\neq 0$, imposibil...3p

$\sqrt{2+a}-b=0$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+a}-b}{x-2}=\dfrac{3}{2\sqrt{2+a}}$..................................2p

$\sqrt{2+a}=2\to a=2$...1p

$b=\sqrt{2+a}$ =2...1p

Subiectul 2 Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n, n\in N, x_0=0, x_1=1$

a) Arătați că $A^n=\begin{pmatrix}x_{n-1} & x_n\\ x_n & x_{n+1}\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in N^*$.

b) Arătați, folosind eventual punctul a), că $x_{n+1}x_{n-1}-x_n^{\ 2}=(-1)^n$, pentru orice $n\in N^*$.

Soluție și barem

a) Demonstrăm inductiv. Pentru $n=1$, trebuie arătat că $A=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, adevărat deoarece

$x_0=0, x_1=1, x_2=1$.

Fie $A^k=\begin{pmatrix} x_{k-1} & x_k \\ x_k & x_{k+1} \end{pmatrix}$, atunci $A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix} x_{k-1} & x_k \\ x_k & x_{k+1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_k & x_{k+1} \\ x_{k+1} & x_{k+2} \end{pmatrix}$, ceea ce trebuia arătat

b) Cum $\det(A^n)=(\det A)^n=(-1)^n$ și $\det(A^n)=x_{n+1}x_{n-1}-x_n^{\ 2}$, rezultă concluzia.

a) verificare 2p

$P(k)\to P(k+1)$ 2p

b) $\det(A^n)=(-1)^n$ 1p

$\det(A^n)=x_{n+1}x_{n-1}-x_n^{\ 2}$ 2p

Subiectul 3 Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $C(A)=\{X\in M_3(C)/A\cdot X=X\cdot A\}$

a) Arătați că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b,c\in C$ astfel încât $X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că ecuația $X^3=O_3$ are o infinitate de soluții în $M_3(C)$.

c) Arătați că ecuația $X^3=A$ nu are soluții în $M_3(C)$.

Soluție și barem

a) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Din $A\cdot X=X\cdot A$ rezultă $a=e=i, d=h, g\in Cb=c=f=0$ și de aici concluzia.

b) De exemplu $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$, $b,c\in C$ sunt soluții.

c) Fie X soluție, atunci $X^4=A\cdot X=X\cdot A$, conform a) rezultă că $X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$, apoi

$$X^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2b & a^3 & 0 \\ 3ab^2+3a^2c & 3a^2b & a^3 \end{pmatrix}$$ și din $X^3 = A$ rezultă $a^3 = 0$; $3a^2b = 1$; $3ab^2 + 3a^2c = 2$, fals.

Prin urmare ecuația nu are soluție.

a)...3p

b)...2p

c)...2p

Subiectul 4 Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ si propozițiile :

(P_1) Șirul $x_n = a_{n+1} - a_n, n \in N^*$ este convergent la zero.

(P_2) Șirul $y_n = \max(a_n, a_{n+1}), n \in N^*$ este convergent

(P_3) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Arătați că:

a) P_1 nu implică P_3

b) P_2 nu implică P_3

c) P_1 și P_2 implică P_3.

Soluție și barem

Considerăm $a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$, atunci $x_n = \frac{1}{n+1}$ converge la zero și $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent, $a_n \to \infty$

Considerăm $a_n = (-1)^n$, atunci $y_n = 1$, deci este convergent pe când $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

Fie P_1 si P_2, adevărate. Atunci $y_n = \frac{a_{n+1} + a_n + |a_{n+1} - a_n|}{2}$ și $a_{n+1} = a_n + x_n$. Deducem că

$2y_n = 2a_n + x_n + |x_n|$, prin urmare $a_n = y_n - \frac{x_n + |x_n|}{2}$, deci convergent.

a) exemplu...2p

b) exemplu...2p

c)exemplu...3p 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.

Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA A XII-A

BAREM

Problema 1 Fie funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1+\sin x-\cos x}{x+e^{x+2015}+\sin x}$.

Determinaţi primitiva $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f, ştiind că $F(0)=1$.

Problema 1 ***Soluţie şi barem***

$F(x)=\int\dfrac{x+e^{x+2015}+\sin x-1-e^{x+2015}-\cos x}{x+e^{x+2015}+\sin x}dx+C=$ 1p

$=\int\left(1-\dfrac{1-e^{x+2015}-\cos x}{x+e^{x+2015}+\sin x}\right)dx+C=\int\left(1-\dfrac{\left(x+e^{x+2015}+\sin x\right)'}{x+e^{x+2015}+\sin x}\right)dx+C=$

$=x-\ln\left(x+e^{x+2015}+\sin x\right)+C$ 4p

Din $F(0)=1$ rezultă că $C=2016$. Prin urmare $F(x)=x-\ln\left(x+e^{x+2015}+\sin x\right)+2016$......2p

Problema 2 Pe intervalul $G_a=(a,+\infty)$ cu $a\in\mathbb{R}$, se defineşte legea de compoziţie

$*:G_a\times G_a\to G_a$ prin $x*y=xy-ax-ay+a^2+a$.

a) Demonstraţi că $(G_a,*)$ este grup abelian.

b) Demonstraţi că oricare ar fi numărul real a, grupul $(G_a,*)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ al numerelor reale pozitive în raport cu înmulţirea.

c) Calculaţi $x_*^n=\underbrace{x*x*...*x}_{n\text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 2 ***Soluţie şi barem***

a) Se verifică axiomele grupului....................3p

b) Se arată că funcţia $f:G_a\to G_a$ definită de $f(x)=x-a$ este izomorfism de grupuri....................2p

c) $x*y-a=xy-ax-ay+a^2+a-a=(x-a)\cdot(y-a)$ pentru orice $x,y\in G_a$....................1p

Se arată prin inducţie că $x_*^n=a+(x-a)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$....................1p

Problema 3 Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu n elemente, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Dacă funcțiile $f_k:G\to G$, $f(x)=x^k, k\in\{1,2,...,n-1\}$ sunt automorfisme ale grupului $(G,\cdot)$, demonstrați că n este număr prim.

Problema 3 ***Soluție și barem***

Fie p prim cu $p\mid n$ (există deoarece n este mai mare decât 2). Prin urmare există $x\in G$ astfel încât $ord(x)=p$ 2p

Dacă $p\in\{1,2,...,n-1\}$, din $x^p=e^p$, rezultă că $x=e$, în contradicție cu faptul că $ord(x)=p$ 3p

Prin urmare $p=n$ și n este număr prim..2p

Problema 4 Determinați funcțiile derivabile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ care îndeplinesc simultan următoarele condiții:

(1) derivata f' este continuă și $0<f'(x)\leq 1$, oricare ar fi $x\in[0,1]$;

(2) $f(0)=0$ și

(3) pentru o primitivă F a funcției f^2 cu $F(0)=0$, avem $F(1)=\dfrac{f^3(1)}{3}$.

Problema 4 ***Soluție și barem***

Fie funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=f^2(x)-f'(x)f^2(x)$ și G o primitivă a funcției g cu $G(0)=0$, $G(x)=F(x)-\frac{1}{3}f^3(x)$..2p

Se verifică faptul că funcția G este crescătoare pe intervalul $[0,1]$..1p

Din relația $0=F(1)-\frac{1}{3}f^3(1)\geq F(x)-\frac{1}{3}f^3(x)\geq 0, \forall x\in[0,1]$ rezultă că $F(x)=\frac{1}{3}f^3(x)$ pentru orice $x\in[0,1]$..2p

Deoarece $f(x)>0, x\neq 0$ rezultă că $f^2(x)=f'(x)\cdot f^2(x)\Rightarrow f'(x)=1, \forall x\in(0,1]$. 1p

Prin urmare $f(x)=x+c$, iar din condiția (2) rezultă că $c=0$ 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.