

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI



ȘCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREȘTI

Concursul Interjudețean de Matematică al Școlii Gimnaziale nr. 56

Ediția a XIV – a

24.01.2015

CLASA a V-a

- Determinați numerele naturale n ce satisfac simultan condițiile:
 - Câtul împărțirii lui n la 9 este un număr de două cifre identice.
 - Câtul împărțirii lui $n + 96$ la 4 este un număr de trei cifre identice. (Gh. Stoica, R.M.T)
- Arătați că $56565656 \cdot 201520152015 = 565656565656 \cdot 20152015$.
 - Scrieți numărul 55^3 ca o sumă de cinci pătrate perfecte nenule.
- Mulțimea numerelor naturale impare 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... se scrie într-un tabel astfel:
1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
.....
 - Aflați care este primul număr din linia 56.
 - Arătați că suma numerelor din linia 56 este mai mică decât 180 000. (Rozica Stefan)
- Se consideră mulțimea $M = \{5^a \cdot 3^b \cdot 4^c \mid a, b, c \text{ sunt cifre nenule în baza } 10\}$
 - Arătați că nu există două submulțimi disjuncte A și B ale lui M , astfel încât $A \cup B = M$ și produsul elementelor din A să fie egal cu produsul elementelor din B .
 - Arătați că orice submulțime cu 5 elemente a lui M conține cel puțin două elemente distincte al căror produs este un pătrat perfect.

Timp de lucru 2 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE- clasa a V-a

1. $n=9 \cdot \overline{aa} + r$ și $r \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$ $a \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$ (1)
 $n+96=4 \cdot \overline{bbb} + s$ și $s \in \{0, 1, 2, 3\}$ $b \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$ (2)1p
 Din prima relație, $n \leq 899 \Rightarrow n+96 \leq 995$ 1p
 $4 \cdot \overline{bbb} + s \leq 995 \Rightarrow b \in \{1, 2\}$ 1p
 Dacă $b=1 \Rightarrow n+96 \in \{444, 445, 446, 447\} \Rightarrow n \in \{348, 349, 350, 351\}$ 1p
 Numerele 348, 349, 350, 351 la împărțirea cu 9 nu dau câtul de forma \overline{aa} 1p
 Dacă $b=2 \Rightarrow n \in \{792, 793, 794, 795\}$ 1p
 Numerele 792, 793, 794, 795 verifică relația (1) deci sunt soluția problemei1p
2. a) $56565656 \cdot 201520152015 = 565656565656 \cdot 20152015 \Leftrightarrow$
 $56 \cdot 1010101 \cdot 2015 \cdot 100010001 = 56 \cdot 10101010101 \cdot 2015 \cdot 10001$ 2p
 $56 \cdot 101 \cdot 10001 \cdot 2015 \cdot 10001 \cdot 10001 = 56 \cdot 101 \cdot 100010001 \cdot 2015 \cdot 10001$ 1p
 $56 \cdot 101 \cdot 10001 \cdot 2015 \cdot 10001 \cdot 10001 = 56 \cdot 101 \cdot 10001 \cdot 10001 \cdot 2015 \cdot 10001$ 1p
 b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$ 1p
 $55^3 = 55^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 55^2 + (55 \cdot 2)^2 + (55 \cdot 3)^2 + (55 \cdot 4)^2 + (55 \cdot 5)^2$ 2p
3. a) Pentru scrierea numerelor din primele 55 de linii se folosesc $1+2+3+\dots+55$ numere
1p
 $1+2+3+\dots+55 = 55 \cdot 56 : 2 = 1540$ (1)1p
 Linia a 56-a începe cu al 1541 –lea număr impar1p
 Linia a 56-a începe cu $2 \cdot 1540 + 1 = 3081$ (2)1p
 b) $S = (2 \cdot 1540 + 1) + (2 \cdot 1540 + 3) + \dots + (2 \cdot 1540 + 111)$ 1p
 $S = 175616$ 2p
4. a) Presupunem prin reducere la absurd că există două submulțimi disjuncte A și B ale lui M ,
 astfel încât $A \cup B = M$ și produsul elementelor din A să fie egal cu produsul elementelor din B .
 Atunci produsul elementelor din M va fi un pătrat perfect
 (1)1p
 Produsul elementelor lui M este $(5^{45} \cdot 3^{45} \cdot 4^{45})^{81}$ care nu este un pătrat perfect, deci contrazice
 (1)2p
 b) $(2^a \cdot 3^b \cdot 4^c) \cdot (2^m \cdot 3^n \cdot 4^p)$ este pătrat perfect dacă $m+a$ și $n+b$ sunt pare ($4^m \cdot 4^p = (2^{m+p})^2$)
 care este pătrat perfect1p
 $2^x \cdot 3^y$ pot avea 4 forme $2^x \cdot 3^y \in \{2^{\text{par}} \cdot 3^{\text{par}}, 2^{\text{par}} \cdot 3^{\text{impar}}, 2^{\text{impar}} \cdot 3^{\text{par}}, 2^{\text{impar}} \cdot 3^{\text{impar}}\}$ 1p
 O submulțime cu 5 elemente a lui M , conform principiului lui Dirichlet conține două elemente
 care au aceeași formă, deci produsul celor două elemente va fi de forma $2^{\text{par}} \cdot 3^{\text{par}} \cdot 4^k$, deci un pătrat
 perfect2p