INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii Gimnaziale nr. 56

Ediţia a XIV – a

24.01.2015

CLASA a VII-a

1. Numerele reale $\sqrt{1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,…, le rescriem într-un tabel astfel:

   $\sqrt{1}$
   $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$
   $\sqrt{7}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{11}$
   $\sqrt{13}$ $\sqrt{15}$ $\sqrt{17}$ $\sqrt{19}$
   ……..

   a) Cu ce număr începe linia 56?
   b) Care dintre linii încep cu un număr rational?

(***)

2. Determinați numerele naturale nenule *n*, știind că produsul divizorilor naturali ai lui *n* este $n^3\sqrt{n}$.

(Sena Azis)

3. Fie *ABCD* un patrulater convex în care *M*, *N*∈(*AB*), *P*, *Q*∈(*BC*), *R*, *S*∈(*CD*), *T*, *U*∈(*AD*) astfel încât *AM*=*MN*=*NB*, *BP*=*PQ*=*QC*, *CR*=*RS*=*SD* și *DT*=*TU*=*UA*.
   a) Arătați că aria patrulaterului *MNRS* este o treime din aria lui *ABCD*.
   b) Dacă $SM \cap TQ=\{E\}$, $SM \cap UP=\{H\}$, $RN \cap TQ=\{F\}$, $RN \cap UP=\{G\}$,arătați că aria lui *EFGH* este o noime din aria lui *ABCD*.

(***)

4. Fie *I* centrul cercului înscris în ΔABC. *P*e paralela prin *A* la *BC* se iau punctele *D* și *E* astfel încât $\frac{DA}{AE}=\frac{AB}{AC}$, iar [*DB*] și [*EC*] sunt situate în semiplane opuse față de *AI*.
   Paralelele prin *E* și *D* la *CI*, respectiv *BI* se intersectează în *F*.
   a) Demonstrați că *F*, *A*, *I* sunt coliniare.
   b) Demonstrați că $FA=AI \Leftrightarrow DA=AB$

(Eugen Radu).

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE- clasa a VII-a

1) a) Pentru scrierea numerelor din primele (n-1) linii se folosesc primele1+2+…+(n-1) numere naturale impare……………………………………………………………………………………….......…1p

$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$.Al $\frac{n(n-1)}{2}$ lea număr impar este n(n-1)-1……………..……………...……...1p

Linia a n-a începe cu numărul $\sqrt{n(n-1)+1}$ 1p

deci linia a 56 –a începe cu numărul $\sqrt{3081}$………………………………………………….......…...1p

b)$\sqrt{n(n-1)+1}=a$, $a\in$Q

$n\in\mathbf{N} \Rightarrow n^2-n+1\in\mathbf{N}$ și $\sqrt{n(n-1)+1}\in Q\Rightarrow\sqrt{n(n-1)+1}\in\mathbf{N}$, deci $a\in\mathbf{N}$…………………………….....1p

$n^2-n+1=a^2 \Rightarrow 4n^2-4n+1+3=4a^2\Rightarrow(2a+2n-1)(2a-2n+1)=3$ (*)……………………………………..…1p

Deoarece a și n sunt numere naturale din (*) ⇒ (2a+2n-1)=1și(2a-2n+1)=3 sau (2a+2n-1)=3 și (2a-2n+1)=1

$(a,n)\in\{(1,0),(1,1)\}$, deci singura linie care începe cu un număr rațional este 1. …………………….....1 p.

2) Determinați numerele naturale nenule *n*, știind că produsul divizorilor naturali ai lui n este $n^3\sqrt{n}$.

Soluție: $n^3\sqrt{n}\in\mathbf{N} \Rightarrow$ *n* este pătrat perfect……………………………………………………........……...1p

Un pătrat perfect are un număr impar de divizori naturali. Notăm acest număr cu $2k+1$……......…...….1p

Fie $d_1, d_2, \ldots, d_{2k+1}$ divizorii lui *n*, astfel încât $1=d_1<d_2<d_3<\ldots<d_{2k+1}=n$.

Atunci $d_1 \cdot d_{2k+1}= d_2 \cdot d_{2k}=\ldots =d_k \cdot d_{k+2}= n$ și $d_{k+1}=\sqrt{n}$……………………………………………..…….2p

Produsul divizorilor naturali ai lui n este $n^k \cdot \sqrt{n}$ de unde $n^k \cdot \sqrt{n} = n^3\sqrt{n}$, $n\in\mathbf{N}^* \Rightarrow k=3$ sau n = 1…….....1p

dacă n are 7 divizori naturali, atunci $n=p^6$, *p* număr natural prim……………………………...…...…2p

3. a) Fie M_1, N_1, B_1 picioarele perpendicularelor duse din *M*, *N*, *B* pe *DC*.

NN_1 linie mijlocie în $MBB_1M_1 \Rightarrow 2NN_1=MM_1+BB_1$...1p

$2S_{NRS}=S_{DMS}+S_{BRC}$ (1)...1p

Analog $2S_{NMS}=S_{DMA}+S_{BRN}$ (2) . Din (1) și (2) $\Rightarrow S_{MNRS}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$...1p

b) Aplicând reciproca teoremei lui Thales $\Rightarrow TS//UR//AC//NP$ 1p

$\Delta DUR \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{UR}{AC} = \frac{DR}{DC} = \frac{2}{3}$; $\Delta BNP \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{BN}{AB} = \frac{NP}{AC} = \frac{1}{3}$, deci $\frac{NP}{UR} = \frac{1}{2}$ 1p

$NP//UR \Rightarrow \frac{NG}{GR} = \frac{1}{2} \Rightarrow NG=\frac{1}{3}RN$ Analog $RF=\frac{1}{3}RN$ deci $RF=FG=GN$ (3)..1p

Analog $SE=EH=HM$ (4) . Din (3) și (4), aplicând **a)** rezultă $S_{EFGH} =\frac{1}{3}S_{MNRS}.= \frac{1}{9}S_{ABCD}$...............................1p

4. a) $\Delta DEF \sim \Delta BCI$ (U.U.) $\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{DF}{BI} = \frac{FE}{CI} = q$ (1)..1p

Fie A_1, B_1, C_1 picioarele bisectoarelor interioare. Din ipoteză și conform teoremei bisectoarei în ΔABC $\Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ (2)..1p

$\Rightarrow \frac{DA}{A_1B} = \frac{AE}{A_1C} = \frac{DA+AE}{A_1B+A_1C} = \frac{DE}{BC} = q$ (3) ; $\Delta DAF \sim \Delta BIA_1$, deci $\sphericalangle DFA \equiv \sphericalangle BIA_1$.......................................1p

$DF//BI$ și $\sphericalangle DFA \equiv \sphericalangle BIA_1$ și A, I, A_1 coliniare rezultă F, A, I coliniare 1p

b) Din $\Delta DFA \sim \Delta BIA_1 \Rightarrow \frac{DA}{A_1B}=\frac{FA}{IA_1}$; $\frac{AI}{IA_1} = \frac{AB}{BA_1} = \frac{AC}{CA_1} = \frac{AB+AC}{BC}$ (t. bisectoarei).......................................1p

$BA_1=\frac{AB\cdot BC}{AB+AC}$...1p

$FA=AI \Leftrightarrow \frac{FA}{IA_1} = \frac{AI}{IA_1} \Leftrightarrow \frac{DA}{A_1B} = \frac{AB+AC}{BC} \Leftrightarrow DA = AB$ 1p