**INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI**

**ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI**

***Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii Gimnaziale nr. 56***

***Ediţia a XIV – a***

***24.01.2015***

**CLASA a VIII**

1. Fie $a,b\in\mathbf{R}$, $a+b\neq0$, astfel încât numerele $a(2b^2-a^2)$, $b(2a^2-b^2)$, $a^3+b^3$ sunt numere raționale.Demonstrați că:

a) $a^6+b^6\in Q$.

b) $\frac{a^2b^2}{a+b}$ este rațional. (Dan Nedeianu, R.M.T).

2. Determinați cel mai mic număr natural $n$ pentru care $\sqrt{n^2+2n+2}$ are primele două zecimale zerouri. ( Eugen Radu)

3. În triunghiul $ABC$, fie $A'\in(BC)$, $B'\in(AC)$, $C'\in(AB)$, astfel încât ($A'A$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'A'C'$ și $AA'\cap BB'\cap CC'=\{O\}$. Pe perpendiculara în $O$ pe planul $(ABC)$ se consideră punctul $V$. Arătați că dreapta $BC$ este perpendiculară pe dreapta $VA$.( Dana Radu)

4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ și un punct $M$ situat în interiorul triughiului $BCD$. Paralelele duse prin $M$ la muchiile $AB$, $AC$, $AD$ intersectează fețele $(ACD)$, $(ABD)$ respectiv $(ABC)$ în punctele $E$, $F$, respectiv $G$. Dacă planul $(BCD)$ este paralel cu planul $(EFG)$ , demonstrați că $M$ este centrul de greutate al triunghiului $BCD$. ( Mihai Monea, Steluța Monea, G.M.)

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE- clasa a VIII-a**

**1.** $a(2b^2-a^2) \in Q \Rightarrow (a(2b^2-a^2))^2 \in Q \Rightarrow 4a^2b^4+a^6-4a^4b^2 \in Q$ (1)……………………………………1p

$b(2a^2-b^2) \in Q \Rightarrow (b(2a^2-b^2))^2 \in Q \Rightarrow 4b^2a^4+b^6-4b^4a^2 \in Q$ (2)…………………………………..…..1p

Din (1) și (2) $\Rightarrow a^6+b^6 \in Q$.(3)……………………………………………………………..…1p

$a^3+b^3 \in Q \Rightarrow (a^3+b^3)^2 \in Q \Rightarrow a^6+b^6+2a^3b^3 \in Q$.(4)…………………………………………….…1p

Din (3) și (4) $\Rightarrow a^3b^3 \in Q$.(5)……………………………………………………………….1p

$a(2b^2-a^2)+b(2a^2-b^2)+(a^3+b^3) \in Q \Rightarrow 2ab(a+b) \in Q$ (6)…………………………………...……1p

Din (5) și (6) și $ab \neq 0$ și $a+b \neq 0$ $\Rightarrow \frac{a^3b^3}{ab(a+b)} \in Q \Rightarrow \frac{a^2b^2}{a+b} \in Q$; pentru $ab = 0$ evident…………………1p

**2.** $\left[\sqrt{n^2+2n+2}\right] = n+1$..........................................................................................................2p

Primele două zecimale ale unui număr pozitiv $x$ sunt $[(x-[x]) \cdot 100]$ unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a lui $a$.........................................................................................................................1p

Primele două zecimale ale lui $\sqrt{n^2+2n+2}$ sunt zerouri dacă $0 \leq \sqrt{n^2+2n+2}-(n+1) < 0{,}01$.......1p

$(n+1) < \sqrt{n^2+2n+2} \Leftrightarrow n^2+2n+1 < n^2+2n+2$..........................................................................1p

$\sqrt{n^2+2n+2} < (n+1{,}01) \Leftrightarrow n^2+2n+2 < n^2+2{,}02n+1{,}0201$...................................................1p

n> 48,995, n natural cel mai mic, rezultă n=49..............................................................................................1p

**3.** Paralela prin *A* la *BC* intersectează pe *A' C'* în *M* și pe *A' B'* în *N*...........................................................1p

$\triangle AC'M \sim \triangle BC'A' \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} = \frac{AM}{BA'}$ (1) ..................................................................................................1p

$\triangle AB'N \sim \triangle CB'A' \Rightarrow \frac{CB'}{B'A} = \frac{CA'}{AN}$ (2) ..................................................................................................1p

Teorema lui Ceva în $\triangle ABC \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$ (3).............................................................................1p

Din (1) , (2) și (3) $\Rightarrow MA=AN$, dar ($A'A$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'A'C'$ deci $\triangle A'NM$ este isoscel și $A'A \perp MN$ ; $MN // BC$ deci $A'A \perp BC$...........................................................................................................1p

finalizare.......................................................................................................................................2p

**4.** Fie *R*, *S*, *T* intersecțiile dreptelor *BM*, *CM*, *DM* cu laturile *CD*, *BD*, respectiv *BC*.

Aplicând t.f.a. în $\triangle$ABR pentru ME//AB $\Rightarrow \frac{RM}{RB} = \frac{RE}{RA}$ Analog $\frac{SM}{SC} = \frac{SF}{SA}$ ; $\frac{TM}{TD} = \frac{TG}{TA}$ (1) ...........................1p

Planul (*ASR*) interesctează planele paralele (*GEF*) și (*BGC*) după dreptele paralele *FE* și *SR*; Analog *GF*//*TS* și *GE*//*TR* (2).............................................................................................................................1p

Din (2) Aplicând Thales în triunghiurile *ASR*, *AST*, *ATR*, obținem: $\frac{RE}{RA} = \frac{SF}{SA} = \frac{TG}{TA}$ (3)............................1p

Din (1) și (3) $\Rightarrow \frac{RM}{RB} = \frac{SM}{SC} = \frac{TM}{TD}$ (4)..............................................................................................1p

Dacă *M* $\in$Int $\triangle$*BCD* atunci $\frac{RM}{RB} + \frac{SM}{SC} + \frac{TM}{TD} = \frac{S_{MCD}}{S_{BCD}} + \frac{S_{MBD}}{S_{BCD}} + \frac{S_{MCB}}{S_{BCD}} = \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}}$ =1 (5).......................................1p

Din (4) și (5) $\Rightarrow \frac{RM}{RB} = \frac{SM}{SC} = \frac{TM}{TD} = \frac{1}{3}$.................................................................................................1p

Finalizare ...................................................................................................................................1p