Centrul Județean de Excelență la Matematică **Prof. Monica Andoni**
Constanța ***Școala gimnazială nr.5 „N. Iorga” Constanța***

Clasa a VIII-a.Lecția nr.10

17.01.2015

Probleme pregătitoare pentru Olimpiada de Matematică

1.Se consideră numărul B= $\overline{b\underbrace{000\ldots0}_{2n+1\text{ ori}}b}$. Demonstrați că $\sqrt{B}$ este număr irațional.

2.Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$3x^2-2xy-y-1=0$$

(G.M. 9/ 2012)

3.Determinați numerele reale x,y,z,pentru care:

$\sqrt{x-2010}+\sqrt{y+2012}+\sqrt{z-4}=\frac{x+y+z+1}{2}$

(G.M. 9/2012)

4.Să se afle numerele naturale care verifică relația:

$9\leq\sqrt{\sqrt{2n+2013}+\sqrt{2n+2009}}+\sqrt{\sqrt{2n+2013}-\sqrt{2n+2009}}<10$

(O.L.Bihor 2014)

5.În cubul ABCDA'B'C'D' punctele M,N,P sunt mijloacele muchiilor CC',A'D',respectiv C'D'.Aflați sinusul unghiului format de dreptele BM si NP.

(O.L. Bihor 2014)

6.Numerele reale a și b verifică egalitățile a+b=$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2014$.

Calculați $\sqrt{2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$ și $\sqrt{2+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}}$.

(O.L. Botoșani 2014)

7.ABCDEFGH prismă patrulateră regulată cu AB=8cm și AE=4cm,M este mijlocul muchiei (EH).

a) Demonstrați că dreapta AM este perpendiculară pe dreapta MC.

b) Aflați lungimea segmentului(FN) știind că (ACM)∩FG={N}.

c) Aflați tangenta unghiului dintre planele (ABD) și (ACM).

(O.L. Botoșani 2014)

8.Se consideră $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2012} \in Z$ astfel încât $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2012} = 1$ și

$S = x_1 + x_2 + x_3 \cdot \ldots + x_{2012}$

a) Arătați că S este număr întreg divizibil cu 4.

b) Calculați produsul $P=(x_1 + \frac{1}{x_2})(x_2+\frac{1}{x_3})\cdot \ldots (x_{2012}+\frac{1}{x_1})$

(O.L.Neamț 2014)

9. ABCDA'B'C'D paralelipiped dreptunghic iar AC∩BD={O}.Ducem AM⊥A'B,

M∈A'B,CN⊥C'B,N∈C'B,DP⊥D'B,P∈D'B.

a) Arătați că PC⊥(AMP).

b) Dacă ,în plus , MN∥(ABC),demonstrați că ABCD este pătrat.

(O.L. Buzău 2014)

10.Să se arate că numărul $x=3n\cdot 10^n-4^n+1$ se divide cu 9,oricare ar fi n număr natural.

(Concursul interjudețean "Unirea-2010",Focșani 2010)

11.Fie α și β doua plane secante,d=$\alpha \cap \beta$,A și B doua puncte fixe cu A∈ α *și* $B \epsilon \beta$.

Dacă P este mijlocul segmentului (MN) unde M și N sunt doua puncte mobile pe d,arătați că:

$(MA^2-MB^2)+(NA^2-NB^2)=2(PA^2-PB^2)$

12.Să se arate că $\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5}\cdot \ldots \frac{\sqrt{2007\cdot 2008}}{4015} < \frac{1}{2^{2007}}$

13.Pe fiecare față a cubului ABCDA'B'C'D se scrie un număr natural diferit de zero,iar în fiecare vârf se scrie produsul celor trei numere scrise pe fețele care se întâlnesc în vârful respectiv. Știind că suma numerelor din vârfurile cubului este 663,să se afle suma numerelor de pe fețele cubului.

(O.L,Cluj 2009,prof. Vasile Șerdean)

14.Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$xyz+xy+xz+yz+x+y+z=1000$.

15.Arătați că ecuația $x^3+y^4=z^5$ are o infinitate de soluții în numere naturale.

16.Determinați toate perechile (x,y) de numere pentru care

$$(xy-7)^2=x^2+y^2$$

(Olimpiada de matematică din India)

17. Fie *ABCA'B'C'* 0 prisrna triunghiulară regulata. Demonstrați că $BC'\perp AB' \Leftrightarrow \frac{AC}{AA'}=\sqrt{2}$.

(O.L. Iași 2014)

Tema pentru acasă:**1,7,8,9,10,12,14**

Bibliografie:

1.Cucurezeanu I.,Ecuații în numere întregi,Ed.Aramis Print,2006

2. Colecția Gazeta de matematică

3.Colecția Revista de matematică

4.Gabriela Constantinescu , Mihai Contanu ș.a.- Pas cu pas prin Matematică - Clasa aVIII-a Editura Crizon 2009

5.http://www.mategl.com