CJEMCTA Prof. Gurgui Adriana-Daniela

TEMA NR. 9

17.01.2015

PROBLEME PREGATITOARE PENTRU OLIMPIADA DE MATEMATICA

PROBLEME PROPUSE:

1. Se considera numerele naturale impare $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$. Demonstrati ca numarul A=$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2016}^2 - 1}$ este irational.

2. Aratati ca :

a) $\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{k} < \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

b) Fie $S_n = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$. Sa se determine A=$\{n \in \mathbb{N}^* | S_n < 0{,}9\}$.

c) Daca a,b,c $\in \mathbb{Q}$ si ab+bc+ca=2015, atunci

$$\sqrt{(2015 + a^2)(2015 + b^2)(2015 + c^2)} \in \mathbb{Q}$$

3. Determinati perechile de numere reale $(a,)$ pentru care egalitatea :

$$|ax + by| + |bx + ay| = 2|x| + 2|y|$$

este adevarata pentru orice numere reale x si y.

4. Determinati numerele prime p si q cu p$\leq q$, pentru care are loc egalitatea:

$$p(2q + 1) + q(2p + 1) = 2(p^2 + q^2)$$

5. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$, n numere reale, strict pozitive, cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Sa se demonstreze ca are loc inegalitatea:

$$A=\sqrt{\frac{a_1}{a_2+a_3+\cdots+a_n}} + \sqrt{\frac{a_2}{a_1+a_3+\cdots+a_n}} + \cdots + \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_n}} + \sqrt{\frac{a_n}{a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}} > 2$$

6. Fie x, y, z numere reale pozitive pentru care avem:

$$\frac{1}{\sqrt{x+13}} + \frac{1}{\sqrt{y+12}} + \frac{1}{\sqrt{z+11}} = \frac{1}{15}$$

Determinati cea mai mica valoare posibila a sumei $x + y + z$ si aflati numerele x,y, z in acest caz.

7. Determinati numerele irationale x, astfel incat $x^2 + 2x$ si $x^3 - 6x$ sa fie numere rationale.

8. Fie ABCD un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, $AC \cap BD = \{T\}$ si $m(\widehat{BTC}) = 120^\circ$. Punctul E este mijlocul segmentului BT, Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ΔDAT si punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ΔTAB. Demonstrati ca patrulaterul TGOE este dreptunghi.

9. Intr-un patrat de latura 60 se considera 121 de puncte distincte oricare trei necoliniare. Aratati ca printre acestea, exista trei puncte cu proprietate ca aria triunghiului determinat de ele este cel mult 30.

10. In trapezul isoscel ABCD cu $AB \parallel CD$ se duce paralela la AC prin mijlocul M al diagonalei $[BD]$, care intersecteaza baza AB in E. Notam cu O intersectia diagonalelor trapezului si $\{F\} = OC \cap DE$. Sa se arate ca:

a) $DE \perp AB$

b) $\frac{AB}{BE} + \frac{DF}{DE} = 2$

TEMA:

11. a) Demonstrati ca $\sqrt{a(a+1) + \sqrt{a(a+1)}} < a + 1$ oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$.

b) Aratati ca $\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{6+\sqrt{6}} + \sqrt{12+\sqrt{12}} + \cdots + \sqrt{90+\sqrt{90}} < 54$

12. Rezolvati in $\mathbb{Q}$ ecuatia:

$$\frac{x-10}{2010} + \frac{x-17}{2003} = \frac{x-2010}{10} + \frac{x-2003}{17}$$

13. Sa se arate ca pentru orice numar natural $n, n > 1$, numarul $\sqrt{111\ldots1444\ldots4}$ unde 1 apare de *n* ori, iar 4 apare de *2n* ori, este irational.

14. Daca a,b,c$\in \mathbb{N}^*$ astfel incat $\frac{a-b\sqrt{2015}}{b-c\sqrt{2015}} \in \mathbb{Q}$ atunci $a \cdot c$ este patrat perfect.

15. Aratati ca ecuatia $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1007}} + \frac{1}{\sqrt{2014-x}+\sqrt{1007}} = \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2014-x}}$ are 2015 solutii in multimea numerelor intregi.

16. Fie ABCD un trapez cu bazele *BC=10 cm* si *AD=2cm.* Prin punctul $M \in (AB)$ se duce paralela MN la $BC, N \in (CD)$. Sa se calculeze MN stiind ca: $\frac{aria(AMND)}{aria(MBCN)} = \frac{1}{5}$.

17. In exteriorul patratului ABCD se construieste triunghiul dreptunghic isoscel ABE, cu ipotenuza $[AB]$. Fie N mijlocul laturii $[AD]$ si $\{M\} = CE \cap AB, \{P\} = CN \cap AB, \{F\} = PE \cap MN$. Pe dreapta FP se considera punctul Q astfel incat $[CE$ este bisectoarea unghiului QCB. Aratati ca $MQ \perp CF$.