TEOREMA LUI THALES ŞI CONSECINŢELE SALE

Vasile Arsinte

Abstract: In this paper we develop, from Thales ' theorem, consequences and its applications at the elementary level .

12.1.Proporţii derivate

Egalitatea a două rapoarte se numește **proporție**: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$; a şi d se numesc **extremi**, iar b şi c se numesc **mezi**.

Proporţiile derivate se pot obţine astfel:

(i) Schimbând mezii sau extremii între ei: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

(ii) Inversând rapoartele:. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

(iii) Făcând în ambele rapoarte aceleaşi operaţii:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d},$$
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d},$$
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

(iv) Amplificând sau simplificând un raport:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{ce}{de},\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\frac{c}{e}}{\frac{d}{e}}.$$

(v) la fel ca în (iii)&(iv):

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{ma+nb}{ma-nb}=\frac{mc+nd}{mc-nd},\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{ma}{ma-nb}=\frac{mc}{mc-nd}..$$

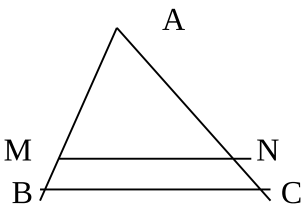
12.2.Şiruri de rapoarte egale:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}=\frac{m_1a_1+m_2a_2+...+m_na_n}{m_1b_1+m_2b_2+...+m_na_n},$$

de exemplu: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}=\frac{2a-3c}{2b-3d}$ ş.a.m.d.

12.3.Teorema lui Thales şi reciproca sa

Teorema 61.Teorema lui Thales: *O paralelă la o latură a unui triunghi împarte celelalte laturi în segmente proporţionale.*



$$MN//BC\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}.$$

Observaţia 1: Folosind proporţii derivate,

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Leftrightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Leftrightarrow\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}.$$

Observaţia 2:

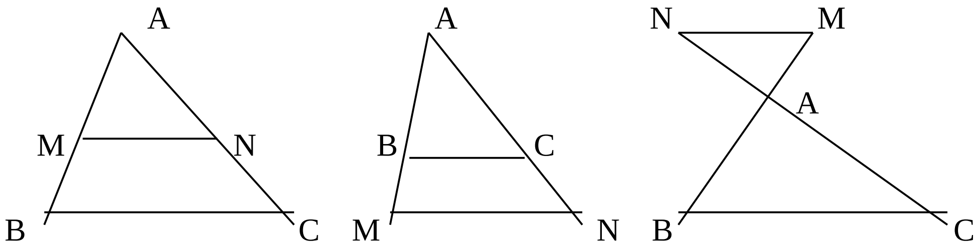
(i) A-M-B⇒A-N-C;

(ii) A-B-M⇒A-C-N;

(iii) B-A-M⇒C-A-N.

Demonstraţie: (i) MN separă A şi B şi nu separă B şi C, rezultă că separă A şi C, conform axiomei de separare a planului.

(ii)&(iii) analog.



A-M-B A-B-M B-A-M

Teorema 62. Reciproca teoremei lui Thales: *În ΔABC, fie $M\in(AB)$, $N\in(AC)$, cu* $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$. *Atunci MN//BC.*

Demonstrație:

12.4.Teorema bisectoarei interioare şi reciproca sa

Teorema 63.Teorema bisectoarei (interioare): *Bisectoarea interioară a unghiului unui triunghi intersectează latura opusă unghiului şi o împarte în segmente proporţionale cu celelalte laturi ale triunghiului.*

Demonstrație:

Definiția cevienei: *Segmentul ce uneşte vârful unui triunghi cu un punct de pe dreapta suport a laturii opuse.*

Teorema 64. Reciproca teoremei bisectoarei (interioare): *Dacă o ceviană, interioară unghiului triunghiului din care pleacă, împarte latura pe care cade în segmente proporţionale cu celelalte laturi ale triunghiului, atunci este bisectoarea interioră a unghiului triunghiului.*

Demonstrație:

12.5.Teorema bisectoarei exterioare şi reciproca sa

Teorema 65.Teorema bisectoarei (exterioare): *Bisectoarea exterioară a unghiului unui triunghi intersectează dreapta suport a laturii opusă unghiului şi o împarte în segmente proporţionale cu celelalte laturi ale triunghiului.*

Demonstrație:

Teorema 66. Reciproca teoremei bisectoarei (exterioare): *Dacă o ceviană, exterioară unghiului triunghiului din care pleacă, împarte latura pe care cade în segmente proporţionale cu celelalte laturi ale triunghiului,atunci este bisectoarea exterioară a unghiului triunghiului.*

Demonstrație:

12.6.Teorema paralelelor neechidistante şi reciproca sa

Teorema 67. Teorema paralelelor neechidistante: *Fie $d_1//d_2//..\,.//d_n$, a şi b două secante cu $d_i\cap a=\{A_i\},d_i\cap b=\{B_i\},i=1,..\,,n$.Atunci:* $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=...=\frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$.

Demonstrație:

Observaţie: Pentru n=3, obţinem că: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}\Rightarrow\frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{B_1B_2}{B_2B_3}$.

Teorema 68. Reciproca teoremei paralelelor neechidistante. Cazul n=3: *Fie d_1,d_2,d_3,cu $d_1//d_3,d_i\cap a=\{A_i\},d_i\cap b=\{B_i\},i=1,2,3$ şi* $\frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{B_1B_2}{B_2B_3}$. *Atunci $d_1//d_2//d_3$.*

Demonstrație:

Observaţii: (i) Se poate formula o reciprocă şi în cazul general.
(ii) Se pot folosi şi alte proporţii derivate din cele din enunţ.

12.5.Asemănarea şi teorema fundamentală a asemănării

Definiţia asemănării: *Două triunghiuri sunt asemenea,dacă au unghiurile respectiv congruente şi laturile respectiv proporţionale*

Teorema 69.Teorema fundamentală a asemănării: *Dacă în ΔABC, $MN//BC$, unde $M\in(AB)$, $N\in(AC)$, atunci* $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

Demonstrație:

Observaţie: $\Delta ABC\sim\Delta AMN$.

12.6.Cazurile de asemănare ale triunghiurilor

Teorema 70. Cazul I de asemănare:
Demonstrație:

Teorema 71. Cazul II de asemănare:
Demonstrație:

Teorema 72. Cazul III de asemănare :
Demonstrație:

12.7.Teorema lui Menelaus şi reciproca sa

Teorema 73.Teorema lui Menelaus
Demonstrație:

Teorema 74. Reciproca teoremei lui Menelaus
Demonstrație:

12.8.Teorema lui Ceva şi reciproca sa

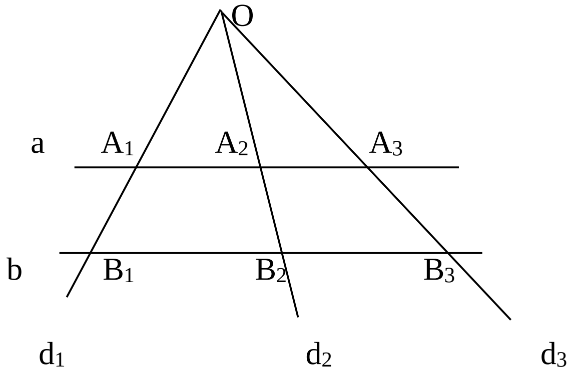
Teorema 75.Teorema lui Ceva
Demonstrație:

Teorema 76. Reciproca teoremei lui Ceva
Demonstrație:

12.9.Teorema fascicolului şi consecinţele sale

Teorema 77.Teorema fascicolului. *(n=3) Fie* $d_1 \cap d_2 \cap d_3=\{O\}$, $a//b$, $a \cap d_I=\{A_i\}$, $b \cap d_I=\{B_i\}$, $i=1,2,3$.*Atunci* $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}$.

Demonstrație:



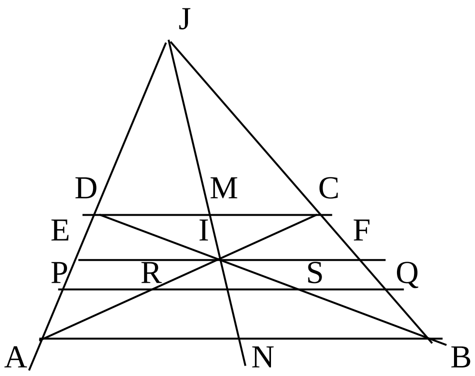
Teorema 78. Reciproca 1. *(n=3) Fie* $d_1 \cap d_2 \cap d_3=\{O\}$*,dreptele a şi b,cu* $a\cap d_I=\{A_i\}$, $b\cap d_I=\{B_i\}$, $i=1,2,3$, $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}$. *.Atunci a//b.*

Demonstrație:

Teorema 79. Reciproca 2. *(n=3) Fie dreptele* d_1, d_2, d_3 *,a//b,* $a\cap d_I=\{A_i\}$, $b\cap d_I=\{B_i\}$, $i=1,2,3$, $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}$. *.Atunci* $d_1\cap d_2\cap d_3=\{O\}$

Demonstrație:

12.10.Consecinţele teoremei lui Thales în trapez



Teorema 80: *În trapezul ABCD(AB//CD), fie I intersecţia diagonalelor şi J intersecţia laturilor neparalele.Atunci IJ înjumătăţeşte bazele.*
Demonstrație:

Teorema 81: *Reciproc, dreapta determinată de două din cele patru puncte, I, J, M, N, trece prin celelalte două puncte (sunt 5 cazuri).*
Demonstrație:

Teorema 82: *În patrulaterul ABCD, dacă M, mijlocul lui CD, N, mijlocul lui AB, I şi J sunt coliniare, atunci AB//CD.*
Demonstrație:

Teorema 83: *Dacă EF e paralela prin I la bazele trapezului,atunci (EI)≡(IF) şi reciproc, dacă I este mijlocul segmentului (EF), atunci EF//AB//CD.*
Demonstrație:

Teorema 84: *Mai general, dacă PQ, o paralelă la baze, intersectează diagonalele în R, respectiv S, atunci (PR)≡(SQ). Reciproc, cu notaţiile din figură, dacă (PR)≡(SQ), atunci PQ//AB//CD.*
Demonstrație:

Teorema 85: *Să se determine* $\frac{a}{b}=\frac{AP}{PD}$*, astfel încât (PR)≡(RS)≡(SQ), dacă PQ//AB.*
Demonstrație:

Teorema 86: *Să se determine (PQ),în funcţie de* $\frac{a}{b}=\frac{AP}{PD}$*, AB şi CD, dacă PQ//AB.*
Demonstrație:

References:

[1] *Vasile Arsinte* – Basic Elementary Geometry, to appear.

[2] *** Gazeta Matematică seria B, Bucharest, **I.S.S.N. 1584-9333.**

[3] *Jacques Hadamard* – Leçons de Géométrie Élémentaire, Librairie Armand Colin, Paris, 1947.

[4] *Traian Lalescu* – Geometria Triunghiului, Editura Apollo, Craiova, 1993.

[5] *Constantin Mihalescu* – Geometria Elementelor Remarcabile, Societatea de Științe Matematice din România, București, 2007, **I.S.B.N. 978-973-0-04864-3.**

[6] *N.N. Mihăileanu* – Lecții Complementare de Geometrie, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976.

[7] *Gheorghe Țițeica* – Probleme de Geometrie, Editura Tehnică, 1965.

Address of the author:
Vasile Arsinte,
Liceul Teoretic Callatis,
Mangalia, Constanța, România,
E-mail: arsintevasile@yahoo.com

II. SEGMENTE PROPORTIONALE

Teorema lui Tales

II.1.A.

1. Fie paralelogramul ABCD şi M un punct pe diagonala BD. Paralelele prin M la AB şi BC intersectaează laturile AD şi DC în N şi P. Să se arate că [redacted] $NP \parallel AC$.

2. Fie triunghiurile ABC şi ABD, punctele C şi D fiind în semiplane diferite determinate de dreapta AB. Prin punctul E, situat pe segmentul AB, se construiesc paralele la AC şi AD, care intersectează BC şi BD în F şi G. Să se arate că $FG \parallel DC$.

3. Fie triunghiul ABC şi punctele E şi D pe AB şi AC, astfel încît $3AE = AB$ şi $3AD = AC$. Segmentele BD şi CE se prelungesc cu segmentele DP şi EQ astfel încît $BD = 2PD$, $EC = 2EQ$. Să se arate că punctele P, A, Q sînt coliniare.

4. Fie două cercuri, $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, tangente exterioare în A. Fie B şi C două puncte pe cercul $\mathcal{C}_1$, E şi D intersecţiile cercului $\mathcal{C}_2$ cu dreptele BA şi CA. Să se arate că $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$.

5. Pe diagonala BD a paralelogramului ABCD se consideră un punct O. Paralela prin O la AB intersectează AD şi BC în M şi N, iar paralela [redacted] prin O la BC intersectează dreptele AB şi DC în Q şi P.
Să se arate că $NQ \parallel MP$.

6. Fie M un punct pe latura BC a triunghiului ABC. Paralelele prin M la AB şi AC intersectează laturile AC şi AB în P şi Q.
Să se arate că:
$$\frac{CP}{AC} + \frac{QB}{BA} = 1$$

7. In triunghiul ABC se consideră mediana AD şi un punct L pe latura BC. Paralela dusă prin L la AD intersectează dreptele AB şi AC în F şi E. Să se arate că:
$$\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC}.$$

8. In patrulaterul ABCD fie E un punct pe latura AB. Paralela prin E la DC intersectează BD în M. Să se arate că $MN \parallel BC$, N fiind intersecția paralelei prin D la AB cu EC

9. In triunghiul ABC se consideră punctele $E \in AC$ şi $D \in AB$, astfel încît $DE \parallel BC$. Paralela prin D [redacted] la CA intersectează BC în F; paralela prin F la AB intersectează AC în H; paralela prin E la AB intersectează BC în P, iar paralela prin P la AC intersectează AB în Q.
Să se arate că $HQ \parallel DE$.

10. Fie M un punct interior pătratului ABCD, P şi Q proiecţiile sale pe laturile AB şi BC. Să se arate că [redacted] dacă $PA \cdot QB = QC \cdot PB$, atunci M se află pe diagonala BD.

II.1.B.

1. In patrulaterul ABCD, intersecţia O a diagonalelor este mijlocul diagonalei AC, E simetricul vîrfului D faţă de O şi $M = AB \cap CE$, $N = BC \cap AE$.
Să se arate că $MN \parallel AC$.

2. Fie P un punct pe latura AB în paralelogramul ABCD. Paralelele prin P la AC şi BD intersectează laturile BC şi AD în M şi N.
Să se arate că M, O, N sînt coliniare.

3. In triunghiul ABC se prelungesc laturile AB, BC, CA, cu segmentele $BD \equiv BC$, $CF \equiv AC$, $AH \equiv AB$. Paralelele prin D, F, H la BC, CA, AB intersectează dreptele AC, BA, BC în E, G, I. Să se arate că există relaţiile:
$$BC^2 = BI \cdot CE \; ; \; AC^2 = CE \cdot AG \; ; \; AB^2 = AG \cdot BI.$$

4. Fie triunghiul ABC şi punctele D pe AB şi E pe prelungirea laturii AC, astfel încît $BD \equiv CE$. Dacă $M = BC \cap DE$, să se arate că :
$$AB \cdot MD = AC \cdot ME.$$

5. In trapezul ABCD, cubazele AB şi CD, fie M un punct pe latura AD. Paralela prin A la MC intersectează latura BC în N. Să se arate că :
$$ND \parallel MB.$$

6. Se consideră patrulaterul ABCD. Parlelea prin B la AD intersectează AC în F, iar paralela prin A la BC intersectează BD în E.
Să se arate că $CD \parallel EF$.

7. In triunghiul ABC se consideră punctele D pe latura BC şi E pe segmentul AD, $F = AC \cap BE$. Să se calculeze raportul $\frac{AF}{FC}$, dacă $\frac{BD}{DC} = u$, $\frac{DE}{AE} = m$.

8. O dreaptă variabilă ce trece prin vîrful A al paralelogramului ABCD intersectează dreptele BD, BC, CD în E, F, G. Să se arate că $AE^2 = EF \cdot FG$ şi că produsul $BF \cdot DG$ este constant.

9. In triunghiul ABC, fie bisectoarea BD şi prin D paralela DE la BC, $E \in AB$. Să se arate că dacă $DE \equiv DC$, atunci triunghiul ABC este isoscel

10. In triunghiul dreptunghic ABC fie D proiecţia vîrfului A pe ipotenuza BC şi AH bisectoarea unghiuli DAC, $H \in DC$. Bisectoarea unghiului ABC intersectează AD şi AC în F şi E.
Să se arate că $FD \cdot HC = HD \cdot AE$.

11. In triunghiul ABC isoscel fie M un punct pe baza BC, astfel încît $BM > MC$. Perpendiculara în M pe BC intersectează latura AC în D.
Să se arate că $2AD \cdot MC = DC \cdot (BM - MC)$.

12. Intr-un cerc se consideră două coarde, AB şi CD, care se intersectează în punctul M, interior cercului, astfel încît $MA \cdot MD = MB \cdot MC$.
Să se arate că $AB \equiv CD$.

13. Fie trapezul ABCD cu baza mare AB şi $O = AC \cap BD$. Paralela dusă prin O la AD intersectează AB în P şi fie Q un punct pe AB.
Să se arate că $OQ \parallel BC$ dacă şi numai dacă P şi Q sînt simetrice faţă de mijlocul laturii AB.

14. In triunghiul ABC, fie bisectoarele BD şi CE, F şi H proiecţiile vîrfului A pe aceste bisectoare şi I intersecţia bisectoarelor.
Să se arate că $IB \cdot CH = IC \cdot BF$.

II.2. Teorema bisectoarei

1. In triunghiul ABC, fie M mijlocul laturii BC. Bisectoarele unghiurilor AMB şi AMC intersectează laturile AB şi AC în D şi E.
Să se arate că $DE \parallel BC$.

2. In triunghiul ABC, fie BD bisectoarea unghiului ABC. Paralelele duse [redacted] prin D la BC şi AB intersectează laturile AB şi AC în E şi F. Dacă lungimile laturilor triunghiului ABC sînt a,b,c, să se [redacted] calculeze perimetrul patrulaterului EBFD.

3. In triunghiul ABC, I este intersecţia bisectoarelor BE şi CD. Să se arate că dacă $CE \equiv BD$, atunci $DE \parallel BC$ şi triunghiul ABC este isoscel

4. In triunghiul ABC, $AB \equiv AC$ şi $m(\widehat{BAC}) = 135^\circ$. Se consideră punctele D şi E pe latura BC, astfel încît $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle EAC$.
Să se arate că $BD^2 = BC \cdot DE$.

5. In triunghiul ABC, I este intersecţia bisectoarelor interioare BE şi AD, iar AF este bisectoarea exterioară a unghiului BAC, unde $E \in AC$, $D \in BC$, $F \in BC$. Să se calculeze, în funcţie de laturile triunghiului ABC, lungimile segmentelor BD, DC, şi rapoartele $\frac{AI}{DI}$, $\frac{IB}{IE}$

6. In triunghiul ABC, fie I intersecţia bisectoarelor interioare AD, BE, CF. Să se arate că:
$$\frac{AI}{AD} + \frac{BI}{BE} + \frac{CI}{CF} = 2.$$

7. Fie AD şi AE bisectoarele unghiurilor BAC şi BAD în triunghiul ABC, D şi E fiind pe latura BC. Să se arate că:
$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{DC}{AC \cdot DE}$$

8. Fie M mijlocul laturii AC în triunghiul ABC. Paralela prin M la bisectoarea BE a unghiului ABC intersectează pe BC în D şi pe AB în F. Să se arate că $AF \equiv DC$.

9. Se consideră un triunghi ABC şi punctele D şi E pe dreapta BC, astfel încît $AD \perp AE$ şi $DB \cdot EC = DC \cdot EB$. Să se arate că semidreptele AD şi AE sînt bisectoarele unghiului BAC.

10. Fie dreptunghiul ABCD şi punctele E, F pe latura AB, astfel încît $AE \equiv EF \equiv FB$, O intersecţia diagonalelor. Să se arate că dacă $m(\widehat{BDC}) = 30^\circ$, atunci $OE \perp BD$ şi $OF \perp AC$.

11. In triunghiul ABC, $AB \equiv AC$ şi $2AB = 5BC$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului este un punct situat pe cercul înscris.

12. Fie două cercuri $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, tangente exterioare în T. Linia centrelor mai intersectează cercul $\mathcal{C}_1$ în A şi cercul $\mathcal{C}_2$ în B. Se consideră apoi punctele $P \in \mathcal{C}_1$ şi $Q \in \mathcal{C}_2$, astfel încît $TP \equiv TQ$ şi fie $M = AP \cap BQ$.
Să se arate că $AT \cdot MB = BT \cdot MA$.

13. Fie triunghiul ABC, cu baza BC. Bisectoarea BE a unghiului ABC intersectează perpendiculara ridicată în A pe AC în punctul F.
Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului, ştiind că:
$$(BC + AB) \cdot EF = 2AC^2.$$

14. Fie patrulaterul convex ABCD, în care bisectoarea AF este paralelă cu latura BC și $BC \equiv DF$, F fiind pe segmentul CD. Să se arate că:

$$\frac{DC}{BC} - \frac{AB}{AD} = 2$$

15. Fie ABCD un patrulater convex, în care $AB \cdot DC = AD \cdot BC$. Să se arate că bisectoarele unghiurilor B și D se intersectează într-un punct situat pe AC. Analog, diagonala BD și bisectoarele unghiurilor A și C sînt concurente. Să se stabilească dacă proprietatea reciprocă este adevărată.

II.3. Teorema fundamentală a asemănării

1. Fie triunghiul dreptunghic ABC, avînd lungimile catetelor [redacted] AB = 150 cm și AC = 80 cm. Se consideră dreptunghiul APNM, unde $M \in AB$, $N \in BC$ și $P \in AC$. Să se afle lungimile laturilor dreptunghiului, știind că are perimetrul 174 cm.

2. In trapezul ABCD, M este intersecția laturilor neparalele DC și AB. Dacă AB = 36, BC = 30, CD = 48 și AD = 24, să se afle MA și MC.

3. Fie trapezul ABCD cu bazele AD și BC, O intersecția diagonalelor sale. Dacă AO = 8, OC = 10, BO = 27, să se afle OB și OD.

4. Lungimile laturilor triunghiului ABC sînt: AB = 12, BC = 15, CA = 20. Printr-un punct P, situat pe latura BC se duc paralele la AB și AC, care intersectează laturile AC și AB în M și N. Stiind că BN = 9, să se afle perimetrul patrulaterului ANMP.

5. Fie I intersecția bisectoarelor în triunghiul ABC. Paralela dusă prin I la BC intersectează laturile AB și AC în punctele M și N.
Stiind că IM = 4, IN = 3, BC = 12, să se afle perimetrul triunghiului ABC.

6. Fie D un punct pe latura BC a triunghiului ABC. Paralelele duse prin B și C la AD intersectează dreptele AC și AB în M și N.
Să se arate că $MB \cdot DC = NC \cdot BD$.

7. Fie triunghiul ABC și D mijlocul laturii BC. O paralelă la AD intersectează dreptele BC, AB, AC în M, E, F. Să se arate că $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ și că $ME + MF = 2 \cdot AD$.

8. Fie M un punct pe diagonala AC a patrulaterului ABCD. Paralelele prin M la AB și CD intersectează laturile BC și AD în P și Q.
Să se arate că $\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = 1$.

9. Pe bisectoarea unui unghi drept AOB se consideră un punct fix C. O dreaptă variabilă care trece prin C intersectează laturile unghiului în M și N. Să se arate că:

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \text{constant.}$$

10. Se consideră paralelogramul ABCD și fie F un punct pe dreapta AB, $E = DF \cap AC$. Să se afle BF, dacă AB = a și $\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}$.

11. In triunghiul ABC, $m(\widehat{BAC}) < 90^\circ$, fie M mijlocul laturii BC, D proiecția vîrfului A pe BC și E proiecția centrului de greutate G a triunghiului pe BC. Să se arate că $3 \cdot BE = BD + BC$. Să se studieze proprietatea dacă $m(BAC) > 90^\circ$.

12. Fie triunghiul ABC, M mijlocul laturii BC, E şi F pe laturile AB şi AC astfel încît $EF \parallel BC$ şi $ME \perp MF$. Dacă AM = m şi BC = a, $G = EF \cap AM$, să se afle lungimea segmentului EF şi relaţia dintre a şi m, dacă G este centrul de greutate a triunghiului ABC.

13. Fie pătratul ABCD. O dreaptă care trece prin B intersectează latura CD în E, diagonala AC în H şi prelungirea laturii AD în F.
Să se arate că $AF \cdot HE = HF \cdot CE$.

14. Se consideră un dreptunghi ABCD şi o dreaptă d, care nu trece prin nici un vîrf al dreptunghiului. Fie $M = d \cap AB$, $N = d \cap BC$, $P = d \cap CD$, $Q = d \cap DA$. Să se arate că:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1.$$

15. In triunghiul ABC, fie punctul E pe latura AB şi D pe latura AC, $G = BD \cap CE$.
a) Să se arate că dacă BG = 2GD şi CG = 2GE, atunci G este centrul de greutate al triunghiului.
b) Să se arate că dacă AE = EB şi BG = 2GD, atunci G este centrul de greutate al triunghiului.

II.4. Cazul I de asemănare a triunghiurilor

II.4.A.

1. In triunghiul ABC, fie AB = 10,8, AC = 9 şi punctul D pe latura AB, astfel încît $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ACB$. Să se afle AD.

2. Fie triunghiul ABC, în care AB = AC = 50 şi BC = 60. Se construiesc înălţimile AD şi BF, unde $D \in BC$ şi $F \in AC$. Fie E proiecţia punctului D pe dreapta AC [redacted]. Dacă AD = 40, să se afle lungimile segmentelor BF şi DE.

3. In trapezul isoscel ABCD, bazele sînt AB = 26 şi DC = 10, iar laturile neparalelele sînt AD = BC = 17. Stiind că înălţimea trapezului este 15, să se afle distanţele punctelor A şi B la dreapta BC.

4. Fie P un punct exterior unui cerc cu raza de 5 cm, PA o tangentă la cerc. Diametrul cercului ce trece prin P intersectează cercul în punctele B şi C. Dacă PB = 8 cm, PC = 18 cm, să se afle lungimea tangentei PA.

5. Fie dreptunghiul ABCD, în care AB > BC şi E proiecţia vîrfului B pe diagoanala AC, [redacted] $F = AD \cap BE$. Să se arate că $AF \cdot AD = BF \cdot BE$.

6. Fie triunghiul ABC isoscel cu baza BC înscris într-un cerc. O dreaptă care trece prin A intersectează latura BC în D şi cercul în E. Să se arate că $AC^2 = AD \cdot AE$.

7. Fie triunghiul dreptunghic ABC, M mijlocul ipotenuzei BC, N şi P proiecţiile punctului M pe dreptele AB şi AC.
Să se arate că $\triangle AMP \sim \triangle BMN$.

8. Fie triunghiul dreptunghic ABC. Perpendiculara ridicată într-un punct P al ipotenuzei BC intersectează dreptele AB şi AC în N şi M.
Să se arate că $PN \cdot PM = PB \cdot PC$ şi apoi [redacted] să se calculeze lungimea ipotenuzei, dacă $BP \equiv PC$ şi PM = 3 cm, MN = 9 cm.

9. Intr-un triunghi ABC, $m(\hat{A}) = 90^\circ$ şi $AC = 2 \cdot AB$. Fie $D \in AC$, astfel încît ~~unghiul ABD~~ $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ABC$. Să se arate că $DC = 3 \cdot AD$.

1o. Fie ddouă cercuri tangente exterioare în A. Două drepte care trec prin A intersectează un cerc în punctele B şi C, iar celălalt în D şi E. Să se arate că $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

11. Două cercuri sînt secante în A şi B. Trei drepte ce trec prin A intersectează un cerc în M,N,P, iar celălalt în D,E,F.
Să se arate că $\Delta MNP \sim \Delta DEF$.

12. In triunghiul ABC,bisectoarea AM intersectează cercul circumscris triunghiului în N. Să se arate că $\Delta AMB \sim \Delta MNC \sim \Delta ACN$.

13. In triunghiul ABC,se construiesc înălţimile BD şi CE. Să se arate că $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ şi să se arate că într-un triunghi,înălţimile sînt invers proporţionale cu laturile corespunzătoare lor.

14. Dintr-un punct A exterior unui cerc se duce tangenta AB la cerc şi o secantă faţă de cerc,pe care îl intersectează în punctele C şi D.
Să se arate că $\Delta ABC \sim \Delta ABD$.

15. In triunghiul dreptundhic ABC,fie D proiecţia vîrfului A pe ipotenuza BC. Perpendicularele ridicate în B şi C pe dreapta BC intersectează dreptele AC şi AB în punctele E şi F. Dacă se notează lungimile laturilor triunghiului ABC cu a,b,c, să se arate că :

$$AD = \frac{bc}{a},\ BE = \frac{ac}{b},\ CF = \frac{ab}{c}.$$

16. Fie triunghiul ABC,înscris într-un cerc. Bisectoarea unghilui ABC intersectează AC în M şi cercul N,iar perpendiculara coborîtă din A pe BN intersectează BN în P. Să se arate că $BP \cdot AN = BN \cdot AM$.

17. In dreptunghiul ABCD,perpendiculara coborîtă din A pe BD intersectează pe BD şi BC în E şi F.
Să se arate că: $AB^2 = BF \cdot BC = AE \cdot AF = BE \cdot BD$; $BE^2 = EF \cdot EA$.

18. In triunghiul ABC,fie P proiecţia punctului A pe BC,M şi N proiecţiile vîrfurilor B şi C pe o dreaptă care trece prin vîrful A.
Să se arate că $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

19. In triunghiul ABC,isoscel cu baza BC,fie D proiecţia vîrfului A pe dreapta BC. Bisectoarea unghiuluiABC intersectează dreapta AD în E şi perpendiculara în A pe AB în F.
Să se arate că $AB \cdot DE = AF \cdot BD$.

2o. Fie triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc şi F,simetricul lui B faţă de C. Bisectoarea unghiului ABC intersectează cercul în E. Să se arate că punctele A,E,F sînt colimiare şi că $2 \cdot AB^2 = AF \cdot BE$.

21. Intr-un cerc se consideră un diametru AB. Tangenta într-un punct M intersectează tangentele în A şi B la cerc în punctele P şi Q.
Să se arate că $4 \cdot MP \cdot MQ = AB^2$.

22. In triunghiul ABC, $m(\hat{B}) - m(\hat{C}) = 9o^{\circ}$, H este proiecţia vîrfului A pe dreapta BC. Să se arate că $AH^2 = HB \cdot HC$.

23. Fie dreptunghiul ABCD. Perpendicularele ridicate în B şi D pe dreapta BD intersectează dreptele CD şi CB în M şi N. Să se arate că:
$AB \cdot DM = BC \cdot BN$; $BM \cdot DN = AD \cdot BN$; $BM \cdot DN = AB \cdot DM$; $BD^2 = BM \cdot DN$

II.4.B. Cazul I de asemănare a triunghiurilor

1. In triunghiul ABC, isoscel cu baza BC, se construiesc înălţimile AD şi BE. Fie H ortocentrul triunghiului şi O centrul cercului circumscris triunghiului. Să se arate că $BD^2 = AD \cdot DH$ şi $AD \cdot BC = AB \cdot BH$.

2. In trapezul ABCD cu bazele AB şi CD, fie E intersecţia diagonalelor şi O intersecţia laturilor neparalele, AD şi BC. Paralela dusă prin E la baze intersectază laturile AD şi BC în P şi Q. Să se arate că
   a) $AE \cdot DE = BE \cdot CE$ şi $PE \equiv EQ$;
   b) O, E şi mijloacele bazelor sînt patru puncte coliniare.

3. Fie rombul ABCD. O dreaptăcare trece prin A intersectează dreptele CB şi CD în E şi F. **Să se arate că :**

$$\frac{1}{CE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{AB}$$

4. Fie trapezul ABCD, cu bazele AB şi DC, dreptunghic în A şi D. Cercul de diametrul BC intersectează AD în M şi N.
   Să se arate că: $MA \cdot MD = NA \cdot ND = AB \cdot DC$.

5. Fie dreptunghiul ABCD în care $BC = 2AB$. Perpendiculara din A pe BD intersectează BC în E. Să se arate că $BC = 4BE$.

6. Pe laturile AB şi CD ale paralelogramului ABCD se consideră punctele M şi N, astfel încît $\frac{MA}{MB} = \frac{CN}{ND} = m$. Fie $R = DM \cap AC$ şi $S = BN \cap AC$.
   Să se arate că $AC = (2m + 1) \cdot RS$.

7. Fie trapezul ABCD cu bazele AB şi DC şi un punct M pe latura AD. Paralela dusă prin M la baze intersectază latura BC în N. Cunoscînd $AB = a$, $DC = b$, $\frac{MD}{MA} = \frac{m}{n}$, să se afle MN.

8. In triunghiul isoscel ABC, cu baza BC, fie D proiecţia vîrfului A pe BC. Bisectoarea unghiului ABC intersectează pe AD în E, pe AC în F şi paralela prin A la BC în G. Bisectoarea unghiului CAG intersectează pe BG în H şi pe CG în E. Să se arate că :

$$2AI = BG; \quad BF \cdot BH = AB \cdot BC; \quad AB^2 = 2AH \cdot AI.$$

9. Pe diagonala BD a paralelogramului ABCD se aleg punctele E şi F, astfel încît $CF \perp CD$, $AE \perp BD$. Pe latura BC se consideră punctul P, astfel încît $PE \perp BD$. Să se arate că $DF \cdot DE \cdot PE = BE \cdot AB \cdot CF$.

10. In trapezul ABCD, $AB < DC$, AB DC, $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ şi $AC \perp BD$. Atunci $BD^2 \cdot DC = AC^2 \cdot AB$.

11. In dreptunghiul ABCD, fie E mijlocul laturii BC şi punctele F, G pe AB, astfel încît $AF \equiv FG$ şi $M = AC \cap EF$, $N = AD \cap CG$.
    Să se arate că $AM \equiv MN$.

12. In triunghiul ABC, mediana AM intersectează cercul circumscris triunghiului în D. Să se arate că $BD \cdot AB = DC \cdot AC$.

13. In cercul circumscris triunghiului ABC, se construieşte, diametru AD, care intersectează înălţimile BE şi CF în M şi N.
    Să se arate că $\triangle HMN \sim \triangle ABC$, H fiind ortocentrul triunghiulu ABC.

14. Pe tangenta în vîrful A la cercul circumscris triunghiului ABC se consideră un punct M. Fie P şi Q proiecţiile punctului M pe dreptele AB şi AC iar $N = BC \cap AM$. Să se arate că $MP \cdot AB = MQ \cdot AC$ şi $NB \cdot AC^2 = NC \cdot AB^2$.

15. Fie triunghiul ABC înscris într-un cerc. O secantă paralelă cu BC intersectează cercul în M și N și fie $H = BC \cap AN$. Să se arate că $AM \cdot AH = AB \cdot AC$.

16. Se consideră un triunghi ABC înscris într-un cerc. Perpendiculara coborîtă din vîrful B pe diametrul AD intersectează pe AD în F și pe AC în E. Să se arate că $AB^2 = AE \cdot AC = AF \cdot AD$.

17. In triunghiul ABC, $m(\hat{B}) = 2 \cdot m(\hat{A})$. Bisectoarea unghiului B intersectează pe AC în M și fie N proiecția vîrfului C pe dreapta BM.
Să se arate că $AC^2 - BC^2 = BC \cdot AB = 2 \cdot AM(CM + MN)$.

18. O dreaptă care trece prin vîrful A al pătratului ABCD intersectează BD în M, pe BC în N și pe CD în P. Să se arate că:
$AM^2 = MN \cdot MP$ și $CN^2 \cdot MP = CP^2 \cdot MN$.

19. Fie N un punct pe latura BC în triunghiul ABC. In N se ridică perpendiculara pe dreapta BC, care intersectează dreapta AB în M și dreapta AC în P. Să se arate că: $AB \cdot MN \cdot CP = AC \cdot BM \cdot PN$.

20. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu baza BC. Perpendiculara ridicată în A pe AC intersectează cercul în D și fie $N = AD \cap BC$ și $M = BD \cap AC$. Să se arate că NA este mediatoarea segmentului MC și că $AB \cdot BD = AD \cdot BN$.

21. Fie F un punct pe latura BC a pătratului ABCD și $E = AB \cap DF$. Să se arate că $AE \cdot BF = AB \cdot BE$ și că $BF^2 = FC(BE - BF)$.

22. Fie M un punct pe latura BC a triunghiului ABC. Cercul (ABM) intersectează dreapta AC în N, iar cercul (ACM) intersectează dreapta AB în P. Să se arate că $BM \cdot MC = MP \cdot MN$.

23. Mediatoarea laturii AB a triunghiului ABC intersectează latura AC în E, iar mediatoarea laturii AC intersectează latura AB în D.
Să se arate că $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

24. In triunghiul dreptunghic ABC, bisectoarea unghiului ABC intersectează cateta AC în B_1, iar cercul circumscris în B_2; bisectoarea unghiului ACB intersectează cateta AB în C_1 și cercul circumscris în C_2.
Să se arate că : $\dfrac{BB_1}{CC_1} = \dfrac{BC_2}{CB_2} \cdot \dfrac{AB_1}{AC_1}$.

25. In trapezul ABCD, $AB \parallel DC$, $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$, $AB > DC$ și $AB \equiv AC$.
Să se arate că AD, bisectoarea unghiului ACD și paralela dusă prin intersecția bazelor la baze sînt concurente într-un punct R, iar ABCR este un patrulater inscriptibil.

26 26. Fie P un punct pe latura AB a paralelogramului ABCD și $N = AC \cap DP$, $M = BD \cap CP$. Să se arate că :
$$\frac{MP}{MC} + \frac{NP}{ND} = 1$$

27. Intr-un cerc de centru O se consideră arcele $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{BC}$, astfel încît $B \in \overset{\frown}{AC}$ și $m(\overset{\frown}{AB}) = 90^\circ$, $m(\overset{\frown}{BC}) = 60^\circ$. Dreapta AB intersectează tangenta dusă în C la cerc în D. Să se arate că $OA^2 = AC \cdot BD$.

28. Fie trapezul ABCD, cu baza mică BC. Paralela dusă prin C la AB intersectează BD în M, iar paralela dusă prin D la AB intersectează AC în N. Să se arate că $AB^2 = CM \cdot DN$.

29. In triunghiul ABC se construiesc înălţimile AD,BE,CF. Să [redacted] se arate că: $AE \cdot BF \cdot CD = AF \cdot BD \cdot CE = DE \cdot EF \cdot FD$.

30. In triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = 60^{\circ}$ şi $m(\hat{B}) = 45^{\circ}$, fie AD bisectoarea unghiului BAC. Perpendiculara coborîtă din D pe AB intersectează AB în N şi AC în M. Să se arate că $3AC = 2 \cdot MN$ şi $AC^2 = AB \cdot CM$.

31. Fie E intersecţia diagonalelor AC şi BD ale unui patrulater [redacted] circumscris unui cerc.
Să se arate că dacă $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{AD}{BC}$, atunci ABCD este romb.

32. Fie rombul ABCD şi F un punnct pe latura BC, $E = AB \cap DF$, H mijlocul lui DF şi G mijlocul lui EF. Să se arate că $AD^2 = AE \cdot CF$ şi $DC \cdot BG = BE \cdot CH$

33. Fie P un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC. Se notează proiecţiile lui P pe BC cu L, pe CA cu M şi pe AB cu N. Să se arate:
$$PA \cdot PL = BP \cdot PM = PC \cdot PN.$$

34. Intr-un cerc se consideră coardele AC şi BD, P fiind intersecţia lor.
a) Să se arate că dacă $AB \cdot BC = AD \cdot DC$, atunci $BP \equiv PD$.
b) Dacă $AB \cdot BC = AD \cdot DC$ şi $BC \cdot CD = AB \cdot AD$, atunci ABCD este dreptung

35. Dintr-un punct P exterior unui cerc se construieşte tangenta PA la cerc. O dreaptă care trece prin P intersectează cercul în C şi D.
Să se arate că $AC^2 \cdot PB = AB^2 \cdot PC$.

36. Fie O un punct pe segmentul AB, astfel încît $OA = 2 \cdot OB$, H mijlocul segmentului AB şi M un punct pe mediatoarea segmentului AB. Perpendiculara ridicată în O pe AB intersectează dreapta AM în C şi BM în D.
Să se arate că OFME este paralelogram şi să se afle raportul PO:PA, unde $P = AB \cap EF$.

37. In triunghiul ABC, înscris într-un cerc, unghiul BAC este obtuz şi $m(\hat{C}) = 2 \cdot m(\hat{B})$. Bisectoarea unghiului BAC intersectează cercul în D, iar bisectoarea unghiului ACB intersectează cercul în E. Fie $M = AD \cap BC$.
Să se arate că $MB \cdot BE = MC \cdot CE$ şi $MC \cdot DC = AC \cdot MD$.

38. Două cercuri sînt tangente interioare în A şi Fie AB diametrul în cercul mare. Din B se duce tangenta BC la cercul mic. Cercul mare intersectează pe BC în D şi AC în E. Să se arate că $BE^2 = CE \cdot AE$.

39. In triunghiul ABC, fie M mijlocul laturii BC şi $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ACB$. Bisectoarea unghiului BAC intersectează BC în E, iar bisectoarea unghiului AMB intersectează AB în F. Să se arate că $BC^2 = 2 \cdot AB^2$; patrulaterul AEMF este inscriptibil şi că $EF \parallel AC$.

40. In triunghiul ABC, $m(\hat{C}) = 2m(\hat{A})$. Fie D proiecţia vîrfului B pe bisectoarea CE şi F simetricul punctului C faţă de D. Să se arate că patrulaterul ACBF este inscriptibil şi că [redacted] $BC^2 = 2 \cdot DC \cdot BE$.

41. In trapezul ABCD, AD este baza mică şi O este intersecţia diagonalelor. Paralela dusă prin O la baze intersectează laturile AB şi DC în M şi N. Să se arate că dacă $AD + BC = AB + DC$, atunci $AM + DN = AD$ şi $MB + NC = BC$.

42. Fie O intersecţia diagonalelor în paralelogramul ABCD. O dreaptă care [redacted] trece prin O intersectează AD în E şi BC în F . Paralela dusă prin E la BD intersectează pe AB în G, iar paralela dusă prin F la DB intersectează DC în H. Să se arate că :
$$\frac{EH}{AC} + \frac{EG}{BD} = 1.$$

43. In paralelogramul ABCD fie O intersecţia diagonalelor, F proiecţia punctului O pe dreapta DC şi E mijlocul laturii DC. Mediatoarea laturii DC intersectează diagonala AC în M şi diagonala BD în N.

Să se arate că : $\frac{2}{OF} = \frac{1}{EM} + \frac{1}{EN}$.

44. In triunghiul ABC, fie punctul D pe latura AB şi punctul E pe latura AC, astfel încît $AD \cdot AC = CE \cdot AB$.

Să se arate că mijloacele segmentelor AB, AC, DE sînt coliniare.

45. In trapezul ABCD cu baza mică BC, fie O intersecţia diagonalelor. O paralelă la baze intersectează dreptele AB, BD, CA, CD în M, N, P, Q.

Să se arate că $MN \equiv PQ$. Cum trebuie construită paralela, astfel încît $MN \equiv NP \equiv PQ$.

46. Fie punctele M, N, P pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC, astfel încît $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$ şi D mijlocul lui BC, iar Q simetricul punctului A faţă de mijlocul segmentului MN. Să se arate că punctele P, D, Q sînt coliniare.

47. Se consideră un triunghi ABC, înscris într-un cerc şi fie P un punct pe arcul BC, $M = BC \cap AP$.

Să se arate că dacă $PB \cdot AB = PC \cdot AC$, atunci $MB \equiv MC$.

48. In triunghiul ABC, fie D proiecţia vîrfului A pe BC şi punctul E pe segmentul BD, F pe DC, M şi N proiecţiile punctului D pe AE şi AF.

Să se arate că $AM \cdot AE = AN \cdot AF$.

49. In triunghiul ABC, fie D proiecţia vîrfului A pe BC, F proiecţia vîrfului B pe AC şi E simetricul punctului D faţă de AC, $H = AB \cap EF$.

Să se arate că $\triangle BHD \sim \triangle ABC$.

50. In triunghiul ABC, înălţimea din A intersectează cercul circumscris triunghiului în F. Dreapta AF intersectează diametrul CD în M şi diametrul BE în N. Să se arate că $\triangle MFC \sim \triangle ABC \sim \triangle ANE$.

51. Dintr-un punct P, exterior unui cerc, se construiesc tangentele PA şi PB la cerc. O dreaptă care trece prin P intersectează cercul în C şi D. Să se arate că $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

52. Fie triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc, M un punct pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$ şi $P = CM \cap AB$, $Q = AC \cap BM$. Să se arate că $BC^2 = BP \cdot CQ$.

53. In triunghiul ABC se consideră punctele M şi N pe latura BC, astfel încît $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAN$.

Să se arate că : $\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$

54. In paralelogramul ABCD, $AB > AD$. Fie M un punct pe latura AB, astfel încît $BM \equiv BC$ şi N un punct pe dreapta AD, astfel încît $A \in DN$ şi $DN \equiv DC$. Fie Q un punct arbitrar pe latura AD şi $P = AB \cap CQ$.

Să se arate că : a) punctele C, M, N sînt coliniare;

b) $BP \cdot DQ$ este constant;

c) $CP \cdot QN = CQ \cdot PM$.

55. In pătratul ABCD, fie punctul M pe latura BC şi punctul N pe latura CD, astfel încît $m(\widehat{MAN}) = 45^\circ$; P un punct pe dreapta BC, astfel încît $C \in BP$ şi $CP \equiv BM$; $Q = AN \cap BD$. Să se arate că $\triangle AMC \sim \triangle ADQ$ şi $\triangle DQN \sim \triangle BDP$ şi apoi să se deducă $BP \cdot DN = AB \cdot CM$.

56. Se consideră un triunghi ABC înscris îtr-un cerc și fie M,N,L mijloacele arcelor BC,CA,AB și $P = BC \cap MN$, $Q = AB \cap NL$.
Să se arate că $PQ \parallel AC$ și că centrul cercului înscris în triunghiul ABC este situat pe segmentul PQ.

57. Se consideră două cercuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$, secante în A și B. Tangenta în A la cercul $\mathcal{C}_2$ intersectează cercul $\mathcal{C}_1$ în C, iar tangenta în A la cercul $\mathcal{C}_1$ intersectează cercul $\mathcal{C}_2$ în D. Să se arate că $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

58. Fie M și N două puncte pe arcul de cerc $\widehat{BC}$ a cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că dacă $AM = BM + CM$ și $AN = BN + CN$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

59. In triunghiul ABC, bisectoarea unghiului BAC intersectează latura BC în D și cercul circumscris triunghiului în E.
Să se arate că $AB^2 \cdot DE = BD^2 \cdot AE$.

60 Fie un patrulater convex ABCD. Să se arate că dacă există punctele M pe AD și N pe BC, astfel încît $MN \parallel AB$ și $MP \equiv NQ$, unde $P = MN \cap AC$, $Q = MN \cap BD$, atunci ABCD este trapez.

61. Fie două cercuri secante $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$, în A și B. Tangenta în A la cercul $\mathcal{C}_1$ intersectează cercul $\mathcal{C}_2$ în C, iar tangenta în A la cercul $\mathcal{C}_2$ intersectează $\mathcal{C}_1$ în D ; AB intersectează cercul (ACD) în E.
Să se arate că $AB \equiv BE$ și că $AC \cdot ED = AD \cdot EC$.

62. Fie trapezul isoscel ABCD, M mijlocul bazei mici CD și E proiecția punctului D pe BC. Să se arate că dreptele AC, EM și paralela dusă prin D la BC sînt concurente.

63. In triunghiul ABC, $m(\hat{C}) > m(\hat{B}) = 45^\circ$, se construiesc înălțimile AA', BB', CC' și fie $D = BC \cap B'C'$. Să se arate că $B'A \cdot B'D = B'B \cdot B'A'$ și $B'B \cdot B'A' \cdot CD = B'C \cdot B'D \cdot A'B$

64. Fie trapezul isoscel ABCD, cu baza mică AB, o dreaptă d paralelă cu bazele și M un punct variabil pe cercul circumscris trapezului. Se notează $E = d \cap MA$, $F = d \cap MC$, $G = d \cap AD$, $H = d \cap BC$.
Să se arate că produsul $EG \cdot HF$ este constant.

65. Fie M un punct variabil pe mediana AD a triunghiului ABC, P și Q proiecțiile sale pa laturile AB și AC.
Să se arate că raportul $\frac{MP}{MQ}$ este constant.

66. In triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = 90^\circ$, fie AD bisectoarea. Perpendiculara în D pe BC intersectează AC în E și AB în F.
Să se arate că $AB \cdot DF = AC \cdot DE$.

II.5.A. Cazul II și III de asemănare a triunghiurilor

1. Fie două cercuri, $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$, avînd același centru O. In cercul $\mathcal{C}_1$ se consideră două raze OA și OB, care intersectează cercul $\mathcal{C}_2$ în C și D. Să se arate că $\triangle OAD \sim \triangle OBC$.

2. Fie două semidrepte OM și ON. Pe semidreapta OM se aleg punctele A și B, iar pe semidreapta ON punctele C și D astfel încît $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. Să se arate că patrulaterul ABCD este inscriptibil.

3. In dreptunghiul ABCD, $AB = 2 \cdot AD$. Pe latura DC se consideră punctul M, iar pe latura AD punctul N, astfel încît $AN = 2 \cdot DM$.
Să se arate că $BN \perp AM$.

4. Fie pătrarul ABCD şi punctele E şi F pe prelungirile laturilor AB şi DC, astfel încît $AB = 2 \cdot BE$ şi $CF = CD$. Să se arate că $CE \perp AF$.

5. Fie două patrulatere ABCD şi EFGH, astfel încît $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$ şi $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle EFG$. Să se arate că unghiurile patrulaterelor date sînt respectiv congruente.

6. Fie M un punct interior triunghiului ABC şi M_1, M_2, M_3, proiecţiile sale pe laturile triunghiului şi N_1, N_2, N_3 simetricele lui faţă de laturile triunghiului ABC. Să se arate că $\triangle N_1N_2N_3 \sim \triangle M_1M_2M_3$.

7. Fie M un punct interior triunghiului ABC şi D,E,F centrele de greutate ale triunghiurilor BCM, ACM, ABM. Să se arate că $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ şi să se afle raportul lor de asemănare.

8. Fie trapezul ABCD, cu baza AD şi $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 90^\circ$ există relaţia $AB^2 = BC \cdot AD$. Să se arate că $AC \perp BD$.

9. Se consideră două semidrepte, OM şi ON. Pe OM se alege punctul A, iar pe ON punctele B şi C, astfel încît $OA^2 = OB \cdot OC$.
Să se arate că OM este tangentă cercului (ABC).

10. In triunghiul ABC fie AD bisectoarea unghiului BAC. Se consideră punctul E pe latura AB şi punctul F pe latura AC, astfel încît $AE \equiv DC$ şi $AF \equiv BD$. Să se arate că patrulaterul BCFE este inscriptibil.

<u>II.5.B.</u>

1. Se consideră un trapez dreptunghic ABCD, în care $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$. Prin punctul O de intersecţi a diagonalelor se duce o paralelă la baze, care intersectează AD în E. Să se arate că $\sphericalangle OEC \equiv \sphericalangle OEB$ şi că

$$\frac{1}{OE} = \frac{1}{DC} + \frac{1}{AB}$$

2. Pe diagonalele AC şi BD ale paralelogramului ABCD se construiesc triunghiurile isoscele asemenea, APC şi BQD, avînd bazele AC şi BD.
Să se arate că PQ este perpendiculară pe două laturi opuse ale paralelogramului dat.

3. Pe segmentul AB se consideră un punct M şi se construiesc, de aceeaşi parte a dreptei AB, pătratele AMCD şi BMEF.
Să se arate că $\triangle DMF \sim \triangle AME$.

4. Fie trapezul dreptunghic ABCD, cu baza mică AB şi înălţimea AD. Pe bazele AB şi DC se aleg punctele M şi N, astfel încît $2MB = AM$ şi $2NC = DC$. Fie $E = AN \cap DM$, $F = MC \cap BN$, $H = AD \cap EF$.
Să se arate că HF este bisectoarea unghiului BHC.

5. In triunghiul ABC, $AB = AC = 2BC$, se consideră E, mijlocul bisectoarei BD. Să se arate că triunghiul CED este isoscel.

6. Fie punctul D pe latura BC a triunghiului ABC, M şi N proiecţiile vîrfurilor B şi C pe dreapta AD. Să se arate că AD este bisectoarea unghiului BAC dacă şi numai dacă $\frac{AM}{AN} = \frac{DM}{DN}$.

7. Fie A un punct interior unui cerc de centru O şi raza R. Pe semidreapta OA se alege punctul B, astfel încît $OA \cdot OB = R^2$. Dacă M este un punct al cercului, să se arate că $\triangle OAM \sim \triangle OMB$ şi să se deducă apoi că bisectoarea unghiului AMB trece printr-un punct fix.

8. In triunghiul isoscel ABC, cu baza BC, fie D proiecţia vîrfului A pe BC, E proiecţia punctului D pe AC şi F mijlocul segmentului DE.
Să se arate că $AF \perp BE$.

9. In triunghiul ABC, fie D proiecţia vîrfului A pe BC, E proiecţia punctului D pe AC şi F un punct pe segmentul DE. Să se arate că $AF \perp BE$ dacă şi numai dacă $DF \cdot BD = DC \cdot EF$.

10. In triunghiul isoscel ABC, cu baza BC, se construiesc înălţimile AD şi BE, care se intersectează în H. Prin H se consideră o paralelă la BC, pe care se consideră punctul F, astfel încît $DF \equiv DE$.
Să se arate că $DF \perp AF$.

11. Se consideră trei semidrepte concurente în O: OM, ON şi OP. Se aleg punctele A şi B pe OM, D şi C pe ON, E şi F pe OP, formîndu-se astfel trei patrulatere ABCD, CDEF, ABFE. Să se arate că dacă două dintre aceste trei patrulatere sînt inscriptibile, atunci şi celălalt patrulater este inscriptibil.

12. In triunghiul ABC fie D proiecţia vîrfului A pe BC şi punctele E pe BD şi F pe DC. Se consideră apoi proiecţiile punctului D pe AE şi AF, M şi N. Să se arate că $\triangle AEF \sim \triangle AMN$.

13. Se consideră două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$, avînd lungimile laturilor a, b, c şi a', b', c', care verifică relaţiile : $a(b'-c') = a'(b-c)$; $b(c'-a') = b'(c-a)$; $c(a'-b') = c'(a-b)$. Să se arate că $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

14. In triunghiul ABC, mediana AM intersectează cercul circumscris triunghiului în N. Să se arate că $AN \cdot BM \geq AB \cdot BN$.

15. Fie AD bisectoarea unghiului BAC în triunghiul ABC. Pe latura AB se consideră punctul F, iar pe latura AC punctul E, asrfel încît $AF \equiv DC$ şi $AE \equiv BD$. Fie apoi $M = AD \cap BE$, $P = AD \cap CF$, $N = BE \cap CF$.
Să se arate că triunghiul MNP este isoscel.

II.6. Teorema fascicolului

1. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. O paralelă la BC intersectează dreapta AB în D, dreapta AM în E şi dreapta AC în F.
Să se arate că $DE \equiv EF$.

2. O paralelă la latura BC a triunghiului ABC intersectează latura AB în D şi latura AC în E. Fie M un punct pe latura BC şi $N = DE \cap AM$. Paralela dusă prin N la AB intersectează paralela dusă prin M la AC în F. Să se arate că punctele B, F, E sînt coliniare.

3. Fie O intersecţia diagonalelor în trapezul ABCD. O dreaptă ce trece prin O intersectează baza AD în M şi baza BC în N.
Să se arate că $\frac{MA}{MD} \cdot \frac{NB}{NC}$ = costant.

4. In trapezul ABCD, cu baza mică AD, fie E şi F mijloacele bazelor. O paralelă dusă la baze intersectează dreptele AB şi CD în M şi N. Paralela dusă prin M la CD intersectează dreapta AD în P, iar paralela dusă prin N la AB intersectează AD în Q.
Să se arate că dreptele BP, CQ, EF, sînt concurente.

5. Fie ON bisectoarea unghiului MOP şi A un punct fix pe OM. O dreaptă variabilă ce trece pri A intersectează ON în B şi OP în C. Dacă D este mijlocul segmentului OB,săse arate că dreapta CD trece printr-un punct fix.

6. Fie AM bisectoarea unghilui BAC a triunghiului ABC. Perpendiculara ridicată în B pe BC intersectează dreapta AC în P şi dreapta AM în Q,iar perpendiculara ridicată în C pe BC intersectează dreapta AB în N şi dreapta AM în T. Să se arate că:

$$\frac{BQ}{BP} = \frac{NT}{NC} \quad \text{şi} \quad \frac{AB\cdot PQ}{AC\cdot TN} = \left(\frac{AQ}{AT}\right)^2 .$$

7. Pe laturile AB,BC,CD,DA ale patrulaterului ABCD se consideră punctele M,N,F,E,astfel încît $MN \parallel AC \parallel EF$.

Să se arate că dreptele ME,BD,NF sînt concurente.

8. Fie trapezul ABCD,cu baza AB. Paralela dusă prin A la BD intersectează dreapta CD în F,iar paralela dusă prin C la BD intersectează dreapta AB în E. Fie $O = AC \cap BD$ şi $N = EF \cap BD$. Să se arate că $DN \equiv OB$. Ce condiţie trebuie să îndeplinească trapezul ABCD pentru ca $DN \equiv NO \equiv OB$?

9. Fie D proiecţia vîrfului A a triunghiului ABC pe dreapta BC şi E mijlocul laturii AC. Bisectoarea unghiului AEB intersectează dreapta AD în P şi AB în H,iar bisectoarea unghiului BED intersectează dreapta AD în Q şi BC în F. Să se arate că $HF \perp BC$ şi $\frac{HM}{FM} = \frac{AP}{DQ}$, $M = HF \cap BE$.

10. Fie trei semidrepte a,b,c cu aceeaşi origine şi dreptele d şi d_1. Se notează $A = a \cap d$, $B = b \cap d$, $C = c \cap d$; $M = a \cap d_1$, $N = b \cap d_1$, $P = c \cap d_1$

Să se arate că $d \parallel d_1$ dacă şi numai dacă $MN \cdot BC = AB \cdot NP$.

II.7. Transversale şi ceviene

1. Fie O un punct pe mediana AM a triunghiului ABC şi $E = AB \cap OC$ şi $D = AC \cap OB$. Să se arate că $DE \parallel BC$.

2. Fie O un punct interior triunghiului ABC şi punctele $D = AO \cap BC$, $E = OB \cap AC$ şi $F = AB \cap OC$.

Să se arate că: $\frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{AO}{OD}$

3. Fie D mijlocul laturii BC în triunghiul ABC,E mijlocul laturii AC,F simetricul punctului D faţă de C şi $Q = AB \cap EF$, $P = AD \cap EF$. Să se arate că $AB = 4 \cdot AQ$ şi $AD = 3 \cdot AP$. In ce condiţii, $AB \perp FQ$?

4. Se consideră două puncte fixe A şi B,M un punct nesituat pe dreapta AB. Pe segmentul AM se consideră un punct C,iar pe segmentul BM un punct D,astfel încît $MA = kMC$, $MB = nMD$. Fie O mijlocul segmentului CD şi $P = AB \cap OM$. Să se calculeze $\frac{PA}{PB}$

5. Fie trapezul ABCD cu baza mică AD şi O intersecţia diagonalelor O dreaptă care trece prin O intersectează dreapta AB în N şi dreapta CD în M.

Să se arate că : $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{MD}{MC} = \frac{AD^2}{BC^2}$

6. Să se arate că tangentele în vîrfurile unui triunghi la cercul circumscris intersectează laturile opuse în trei puncte coliniare

7. Fie un triunghi ABC. Cercul care trece prin B și C, tangent dreptei AC în C, intersectează latura AB în D, iar cercul care trece prin B și C tangent dreptei AB în D, intersectează latura AC în E. Pe segmentul DC se consideră punctul F, astfel încît $DF \circ AB = AD \circ FC$, iar pe segmentul BE se consideră punctul H, astfel încît $BH \circ AE = AC \circ HE$.

Să se arate că punctele A, F, H sînt coliniare și că BFCH este paralelogram.

8. Tangentele în vîrfurile triunghiului ABC la cercul circumscris triunghiului formează triunghiul $A'B'C'$. Să se arate că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente.

9. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, D mijlocul laturi BC și E simetricul punctului G față de D. Paralelele duse prin E la BC, CA, AB intersectează dreptele AC, AB, BC în N, P, M.

Să se arate că punctele P, M, N sînt coliniare.

10. In triunghiul ABC se consideră punctul F pe latura BC și O un punct pe segmentul AF. Se prelungește latura BC cu segmentele BM și CN, astfel încît $BM = k \circ BF$ și $CN = k \cdot CF$. Dacă $D = AB \cap OM$ și $E = AC \cap ON$, Să se arate că $DE \parallel BC$.

11. Fie triunghiul ABC și punctele D și E pe latura AB, astfel încît $AD \equiv BE$, punctele F și H pe latura AC, astfel încît $AF \equiv CH$. Fie $M = BC \cap EF$ $N = DH \cap BC$. Să se arate că $BM \equiv CN$.

12. Fie O un punct interior unui paralelogram ABCD. Paralela dusă prin O la AB intersectează latura AD în P și latura BC în E, iar paralela dusă prin O la AD intersectează latura AB în Q și latura CD în F.

Să se arate : a) dreptele AO, BF, ED sînt concurente;
b) dreptele PQ, BD, EF sînt concurente;

13. Fie triunghiul ABC și punctele D pe latura AB, E pe latura AC, M mijlocul segmentului DE, $O = BC \cap AM$.

Să se arate că $\frac{OB}{OC} = \frac{AB}{AC} \circ \frac{AE}{AD}$.

14. In triunghiul ABC se consideră trei ceviene concurente AD, BE, CF. Fie apoi M, N, P mijloacele segmentelor EF, FD, DE. Să se arate că dreptele AM, BN, CP sînt trei drepte concurente.

15. Fie triunghiul ABC. Pe latura AB se consideră punctele C' și C'' astfel încît $5AC' = 5BC'' = AB$; pe latura BC se consideră punctele A' și A'', astfel încît $5BA' = 5CA'' = BC$, iar pe latura AC, punctele B' și B'' astfel încît $5CB' = 5AB'' = AC$. Fie $M = AA' \cap BB''$, $N = BB' \cap CC''$, $P = CC' \cap AA''$. Să se arate că $\triangle MNP \sim \triangle ABC$ și să se afle raportul de asemănare.

16. In triunghiul ABC, fie cevienele concurente, AD, BE și CF, $M = BC \cap EF$, $N = AC \cap DF$, $P = AB \cap DE$. Să se arate că punctele M, N, P sînt coliniare.

17. In triunghiul ABC, fie D proiecția vîrfului A pe BC, O un punct pe segmentul AD și $P = AC \cap OB$, $Q = AB \cap OC$. Să se arate că $\sphericalangle ADQ \equiv \sphericalangle ADP$.

18. In triunghiul ABC, fie D mijlocul laturii BC, E un punct pe latu-AC, F un punct pe latura AB, $P = AC \cap DF$, $N = DE \cap AB$. Paralela prin A la BC intersectează dreapta EF în M.

Să se arate că punctele M, N, P sînt coliniare.

19. In triunghiul ABC, fie punctele D şi E pe latra AB şi F şi G pe latura BC, H şi L pe latura CA, astfel încît $AD \equiv BE$, $BF \equiv CG$, $CH \equiv AL$. Fie M,N,P mijloacele segnentelor DL,EF,HG.
Să se arate că dreptele AM,BN,CP sînt concurente.

2o. Fie M un punct interior triunghiului ABC. Să se arate că tangentele duse în M la cercurile circumscrise triunghiurilor MAB,MBC,MCA intersectează dreptele AB,BC,CA în trei puncte coliniare.

II.8. Puterea unui punct faţă de cerc

1. FieO un punct pe coarda comună a douăcercuri secante $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$. O dreaptă, care trece prin O, intersectează cercul $\mathcal{C}_1$ în E şi F, iar cecul $\mathcal{C}_2$ în P şi Q. Să se arate că $OE \cdot OF = OP \cdot OQ$.

2. Fie punctul C exterior unui cerc şi CA,CB tangentele duse din C la cerc. Paralela dusă prin A la BC intersectează cercul în E, iar EC intersectează cercul în D. Fie $F = AD \cap BC$. Să se arate că $FC^2 = FD \cdot FA$; $AC^2 = CD \cdot CE$; $FC \equiv FB$.
Să se arate că dacă $AD = 2 \cdot DF$, atunci $m(\widehat{ACB}) = 6o^{o}$.

3. In patrulaterul insgriptibil ABCD, $BC > AD$ şi fie $P = AB \cap DC$.
Să se arate că : $PB^2 - PC^2 = AB \cdot PB - PC \cdot DC$
$PA^2 - PD^2 = PD \cdot DC - PA \cdot AB$.

4. Fie AB un diametru într-un cerc de centru O şi C un punct pe raza OB. O dreaptă variabilă care trece prin A intersectează cercul în M şi perpendiculara ridicată în C pe dreapta AB în N.
Să se arate că produsul $AM \cdot AN$ este constant.

5. In triunghiul ABC se construiesc înălţimile AD,BE,CF. Să se arate că: $AE \cdot AC = AH \cdot AD = AF \cdot AB$; $CE \cdot CA = CD \cdot CB = CH \cdot CF$
$BF \cdot BA = BD \cdot BC = BH \cdot BE$

6. Intr-un cerc se consideră o coardă AB şi diametrul CD, perpendicular pe AB. O dreaptă variabilă care trece prin C intersectează segmentul AB în M şi cercul în N. Să se arate că produsul $CM \cdot CN$ este constant.

7. Pe prelungirea diametrului AB a unui cerc se consideră un punct fix C. O dreaptă variabilă, care trece prin C intersectează cercul în M şi N, iar dreptele AM şi AN intersectează perpendiculara ridicată în C pe dreaptă AB în punctele P şi Q.
Să se arate că produsul $CP \cdot CQ$ este constant.

8. Fie PA şi PB tangentele duse dintr-un punct P la un cerc, C mijlocul segmentului AP, D intersecţia dreptei BC cu cercul, iar E intersecţia cercului cu dreapta PD. Să se arate că BE AP.

9. Intr-un cerc de diametru AB, coardele AC şi BD se intersectează în E. Să se arate că $AB^2 = AC \cdot AE + BD \cdot BE$.

1o. In triunghiul ABC se consideră cevienele concurente AD,BE,CF. Cercul circumscris triunghiului DEF intersectează dreptele BC,CA,AB în punctele M,N,P. Să se arate că dreptele AM,BN,CP sînt concurente.

11. In trapezul ABCD, cu baza mică AD, fie E şi F proiecţiile punctului B pe dreptele CD şi CA. Să se arate că $AC \cdot CF = CB \cdot DA + CD \cdot CE$.

12. In triunghiul ABC, $m(\widehat{BAC}) > 90^o$. Să se determine un punct M pe coarda BC, astfel încît $AM^2 = BM \cdot MC$. Să se arate că există două astfel de puncte, M_1 și M_2 și că $\sphericalangle BAM_1 \equiv \sphericalangle CAM_2$.

13. In interiorul unui cerc de centru O se consideră un punct fix A, diferit de O. Prin punctul A se consideră o coardă variabilă MN.
Să se arate că cercurile (M,N,O) trecprintr-un punct fix.

14. Fie două cercuri, $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$, secante în A și B. Se consideră un punct L pe dreapta AB, exterioară cercurilor din care se duce tangenta LQ la cercul $\mathcal{C}_1$ și tangenta LR la cercul $\mathcal{C}_2$. Dacă M este intersecția liniei centrelor cu dreapta AB, săse stabilească în ce condiții $LQ \equiv LM \equiv LR$?

15. Fie patrulaterele inscriptibile $ABCD$ și $ABEF$. Să se arate că patrulaterul $CDFE$ este inscriptibil dacă și numai dacă dreptele AB, EF și CD sînt concurente.

16. Fie triunghiul ABC isoscel cu baza BC. O dreaptă care trece prin A intersectează BC în M și cercul circumscris în N. Să se arate că lungimea tangentei dusă din A la orice cerc ce trece prin M și N are lungime constantă.

17. Fie două cercuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$, secante în A și B. Pe dreapta AB se consideră un punct O din care se construiesc tangentele OT_1 și OP_1 la $\mathcal{C}_1$ și tangentele OT_2 și OP_2 la cercul $\mathcal{C}_2$, astfel încît T_2 este interiorul cercului $\mathcal{C}_1$ și P_1 în interiorul cercului $\mathcal{C}_2$. Să se arate că

$$2m(\widehat{P_1T_1T_2}) = 2m(\widehat{P_1P_2T_2}) = m(\widehat{T_2OP_1}).$$

II.9. Probleme recapitulative

1. Fie trei drepte paralele a, b, c. Pe dreptele a și b se consideră două puncte fixe, A și B, iar pe dreapta c un punct variabil M. Fie $N = a \cap BM$, $P = b \cap MA$, $O = AB \cap NP$. Să se arate că punctul O este un punct fix.

2. Fie triunghiul ABC și o dreaptă variabilă d, care trece prin A. Pe dreapta d se consideră două puncte variabile, D și E, astfel încît $BD \parallel CE$. Să se arate că paralela dusă prin D la AC și paralela dusă prin E la AB se intersectează într-un punct F situat pe dreapta BC.

3. Fie un patrulater $ABCD$ și M,N,P,Q proiecțiile vîrfurilor pe diagonale. Să se arate că patrulaterele $ABCD$ și $MNPQ$ sînt asemenea.

4. Se consideră un triunghi ABC. Perpendiculara în B pe AB intersectează dreapta AC în D, iar perpendiculara ridicată în C pe AC intersectează pe AB în E. Fie M mijlocul segmentului DE.
Să se arate că : a) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.
b) MB și MC sînt tangente la cercul (ABC)
c) ce condiții trebuie să îndeplinească triunghiul ABC pentru ca $DE = 2 \cdot BC$?

5. In patrulaterul $ABCD$, $m(\widehat{BAD}) = 90^o$, $AB \equiv AD$, $BC \equiv CD \equiv BD$. Fie $O = AC \cap BD$, $S = DN \cap AB$ și M,P,N mijloacele segmentelor AD, AC și BC.
Să se arate că $MONP$ este paralelogram și că $SN \cdot SD = SA \cdot SB$.

6. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil $E = AC \cap BD$, M,N,P,Q proiecțiile vîrfurilor A,B,C,D pe diagonale, $G = AM \cap BN$, $F = DQ \cap CP$.
Să se arate că : a) $MN \parallel CD$ și $PQ \parallel AB$, $EM \cdot EP = EN \cdot EQ$;
b) patrulaterele $ENGM$ și $EQFP$ sînt asemenea ;
c) în ce condiții, dreptele AC, BD, FG sînt concurente.

7. Fie triunghiul ABC, Cercul de diametru BC intersectează dreapta AB în D şi dreapta AC în E. Fie $H = CD \cap BE$ şi $L = AH \cap BC$. Cercul de diametru AL intersectează dreapta AB în P şi dreapta AC în Q.

Să se arate : a) $AL \perp BC$;
b) $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$; $AD \cdot AB = AE \cdot AC$;
c) $AE \cdot AP = AD \cdot AQ$.

8. In patrulaterul ABCD, fie $O = AC \cap BD$ şi M,N,P,Q centrele de greutate ale triunghiurilor OAB, OBC, OCD, ODA.

Să se arate că patrulaterele ABCD şi MNPQ sînt asemenea

9. Fie paralelogramul ABCD, Cercul circumscris triunghiului ABD intersectează BC în E şi CD în F iar $G = BF \cap AD$, $H = AB \cap DE$, $L = BF \cap DE$

Să se arate că : a) $\triangle BLE \equiv \triangle DLF$; $\triangle BLH \sim \triangle DLG$; $EF \parallel GH$;
b) patrulaterul DHBG este inscriptibil;
c) $AE \equiv AF$.

10. In triunghiul dreptunghic ABC fie D un punct pe ipotenuza BC. Perpendiculara ridicată în D pe BC intersectează dreapta AC în F şi dreapta AB în E. Să se arate că dacă M este un punct pe dreapta DE, astfel încît $DM^2 = DE \cdot DF$, atunci M este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC.

11. Să se construiască un triunghi dreptunghic, cunoscînd perimetrul său, a.

12. Fie triunghiul ABC şi mediana AD, O un punct pe mediană AD. O dreaptă care trece prin O intersectează AB în P şi pe AC în Q. Dacă $n \cdot AO = m \cdot AD$, să se arate că:

$$\frac{BP}{PA} + \frac{QC}{QA} = 2\left(\frac{n}{m} - 1\right).$$

13. Fie L mijlocul laturii BC în triunghiul ABC şi M şi N mijloacele segmentelor BL şi CL. Fie D un punct pe dreapta AL şi $E = AB \cap MD$, $F = AC \cap ND$. Să se arate că $EF \parallel BC$.

14. Fie triunghiul ABC şi punctul D pe latura BC şi E pe segmentul AD, astfel încît $BD = DC$ şi $AE = 3DE$.

Să se arate că CE este mediană în triunghiul ABC.

15. In triunghiul ABC, $AB < AC$. Fie M mijlocul laturii BC, N un punct pe latura AC, astfel încît $AN \equiv AB$ şi $P = AM \cap BN$. Să se arate că :

$$\frac{BP}{PN} = \frac{AC}{AB}$$

16. Fie punctele fixe A,B,C colinıare. Din punctul C se consideră tangenta CM la un cerc variabil care trece prin punctele A şi B.

Să se afle locul geometric al punctului M

17. Fie AD bisectoarea unghiului BAC în triunghiul ABC. Cercul $\mathcal{C}_1$ cu centrul în B şi raza BD intersectează dreapta AB în N şi R, iar cercul $\mathcal{C}_2$ cu centrul în C şi rază DC, intersectează dreapta AC în M şi P

a) Să se arate că $MN \parallel PR$.

b) Perpendiculara în B pe AB intersectează cercul $\mathcal{C}_1$ în S şi H, iar perpendiculara în C pe AC intersectează cercul $\mathcal{C}_2$ în G şi Q, astfel încît H şi G sînt în interiorul unghiului BAC. Să se arate că $AB \cdot QG = AC \cdot SH$.

c) Să se arate că AD determină pe segmentele SQ şi HG rapoarte egale.