**Centrul Județean de Excelență Constanța**

**Lecția 9. Clasa a VI-a. 17.01.2015**

**Probleme pregătitoare pentru Olimpiada de Matematică**

**1.** Aflaţi numărul natural n ştiind că : $n^{2015} - 1 = 4+4\cdot 5+4\cdot 5^2+4\cdot 5^3+...+4\cdot 5^{2014}$
**2.** Arătaţi că $5^{2015} - 5$ se divide cu $4\cdot 5\cdot 6$
**3.** Fie a şi b două numere naturale nenule. Arătaţi că 9 divide $(3\cdot a + 2\cdot b)$ dacă şi numai dacă 9 divide $(2013\cdot a + 2014\cdot b)$.
**4.** Două unghiuri suplementare au o latură comună, iar bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de $60^0$. Determinaţi măsurile unghiurilor.
*(E:14553, GM 10/2013)*
**5.** Dacă A, B, C, D sunt patru puncte situate pe o dreaptă, în această ordine, arătaţi că : $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$
*(*Culegere de probleme pentru cls.IV-VIII, Carbunaru C. Ed.Sigma VI.G.2.b.)
**6.** Comparaţi numerele *a* şi *b*, dacă

$a=\frac{2^{2014}}{10^{2017}}\cdot 25^{1007}$ si $b=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})....(1-\frac{1}{2014})$

**8.)** Determinaţi numărul de fracţii ireductibile din mulţimea
$A=\{\frac{1}{2015};\frac{2}{2015};\frac{3}{2015};.....;\frac{2014}{2015}\}$

**9.)** Se dă unghiul *AOB* cu măsura de 130°. Se duce semidreapta *(OC* opusă lui *(OA* şi $OD \perp OA$, astfel încât *(OB* şi *(OD* să fie în semiplane diferite faţă de *AC*. În acelaşi semiplan cu (OD se duce $OE \perp OB$. Calculaţi:
**a.)** $m(\sphericalangle BOC)$, $m(\sphericalangle DOE)$ şi $m(\sphericalangle COE)$
**b.)** măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor *AOB* şi *COE*.

**10.)** F ie *ABC* un triunghi oarecare, cu $AB < AC$; $(AD$ bisectoare interioară, $D\in(BC)$ şi $(AM$ bisectoare exterioară, $M\in(CB$. Se consideră punctul $N\in(MA$ astfel, încât $(AM)\equiv(AN)$ şi fie $DN\ AC=\{E\}$. Arătaţi, că:
**a.)** $\triangle ADM \equiv \triangle ADN$;
**b.)** $\triangle ABM \equiv \triangle AEN$;
**c.)** $EMA \equiv BNA$;
**d.)** $AD \perp BE$.
**11.** Să se determine numerele naturale nenule a şi b cu proprietățile: a+b=2014 şi $[a,b]=(a,b)\cdot 682$,unde [a,b] este cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b, iar (a,b) este cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.
**12.** Numerele naturale a,b,m verifică relaţia $2a + 6b - 5m = 0$. Arătaţi că $a^2 + b^2$ se divide cu 5.
G.M. nr. 9/2013
**13.** Fie A şi B două puncte în plan astfel încât AB=1m, $M_1$ este mijlocul segmentului $[AB]$, $M_2$ este mijlocul segmentului $[AM_1]$, $M_3$ este mijlocul segmentului $[AM_2]$ şi aşa mai departe, $M_n$ este mijlocul segmentului $[AM_{n-1}]$ pentru orice număr natural nenul n.
a) Calculaţi lungimea segmentului $[M_5M_4]$.

b) Determinaţi numărul n cel mai mic pentru care lungimea segmentului [AMn] să fie mai mică de 1mm.

**14.**Se dau punctele coliniare A, O, B, în această ordine, şi punctele C şi D de o parte şi alta a dreptei AB, astfel încât m($\sphericalangle COD$)=$90^0$ şi m($\sphericalangle AOC$)=4 m($\sphericalangle AOD$) . Dacă [OM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle$BOC şi [ON este bisectoarea unghiului $\sphericalangle$BOD , se cere:

a) Determinaţi măsura unghiului$\sphericalangle$ DOM;

b) Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle$MON.

**15.** Demonstrați că$\frac{n}{k(k+n)}=\frac{1}{k}$ - $\frac{1}{k+n}$ pentru orice k și n numere naturale.

b) Determinaţi numărul natural nenul *n* pentru care

$\frac{1}{56\cdot57}+\frac{2}{57\cdot59}+\frac{3}{59\cdot62}+...+\frac{62}{n(n+62)}=\frac{2015}{115976}$

**16**. Aflați numărul divizorilor naturali ai numărului $15^{51}$ care sunt multiplii pentru numărul $225^{20}$ .

**17** Arătați că numărul A=$\frac{21^n+23^n-2^{2n}+2^{n+1}3^2}{38}$ este număr natural pentru orice *n* număr natural nenul .

**18**. Fie punctul O mijlocul unui segment de dreaptă [AB] . Pe semidreapta (OA se consideră un punct E astfel încât BE=5· AE . Aflați lungimea segmentului AB știind că EO = 6 cm.

**19.** Se consideră trei puncte A , B , C astfel încât B$\in$ (AC). Fie D și E de o parte și de alta a dreptei AC și (BM , (BN bisectoarele unghiurilor <DBC și respectiv <ABE . Știind că semidreptele (BM și (BN sunt opuse , demonstrați că punctele D , B , E sunt coliniare.

**20**. Rezolvaţi în mulţimea numerelor raţionale pozitive ecuaţia:

$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}+\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+\frac{x+6}{7}=6.$

Tema: problemele 14,15,16,17,18,19,20.