Centrul Județean de Excelență la Matematică **Prof. Mirela Chirilă**

Constanța 2014-2015

TEMA 11. CLASA a -V- a

Probleme pregătitoare pentru Olimpiada de Matematică

1. Comparați numerele $a^{\overline{bb}}$ si $b^{\overline{aa}}$ cu a ≠ b, stiind că $a^3 = b^2$.

OLM,Dolj 2011,G.M.10/2010

2. Determinați numerele de forma $\overline{abcd}$, stiind că $\overline{abcd} + \overline{ab} \cdot \overline{cd} - 97 \cdot \overline{ab} = 2010$

OJM,Dambovita 2009,prof.Cristian Grecu

3. Determinați numărul $\overline{abc}$ cu proprietatea $7^a + 5^b + 4^c = 175$.

G.M.2/2010,OLM,Constanta 2011

4. Determinați $\overline{xyzt}$, stiind că impărțind acest numar la $\overline{yzt}$, obținem catul x + 1 si restul x + 2.

OLM,Constanta 2011

5. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care impărțite la $\overline{bc}$ dau catul 4 si restul egal cu $\overline{bc} - 8$.

G.M.10/2012,OLM,Vrancea 2013

6. Stiind că a = $\overline{b0} + \overline{b1} + \overline{b2} + \ldots + \overline{b9}$, aflați ultima cifră a lui a^b .

OLM,Harghita 2011

7. Se dă produsul P = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2010 \cdot 2011$.

a) Determinați in cate cifre de 0 se termină produsul P.

b) Eliminand din produs toți multiplii de 2 si de 5, aflați ultima cifră a numărului rămas.

OLM,Dambovita 2011

8. Calculați suma primelor 200 de numere naturale care nu sunt cuburi perfecte.

OLM,Valcea 2012

9. Dacă $\overline{ab} + 9 \cdot b = 5 \cdot \overline{ba}$, arătați că $\overline{ab} = (a+b)^2$.

OLM,Giurgiu 2013

10. Se dau numerele $a_1=3$, $a_2=a_1+2\cdot3$, $a_3=a_2+2\cdot 3^2$, ……, $a_{100}=a_{99}+2\cdot 3^{99}$.

a)Determinați numărul a_5.

b) Comparați a_{100} cu 2^{150}.

c) Să se calculeze $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 243^{1010}$.

OLM,Vaslui 2012

11. O urnă conține 50 de bile, albe si negre. Dacă se extrag din urnă oricare 25 de bile , printre acestea se află, in mod sigur două bile albe. Dacă se extrag din urnă oricare 30 de bile , printre acestea se află in mod sigur trei bile negre. Aflați numărul de bile albe,respectiv negre, din urnă. *Marius Perianu*

12. Sub bradul de Crăciun patru frați găsesc patru pungi cu bomboane. Fratele mai mare zice ca fiecare să numere cate bomboane are. El dă fiecarui frate cate 5 bomboane (din bomboanele sale) si constată că:

a)in total cei patru frați au 150 de bomboane.

b)numărul de bomboane pe care il au acum cei patru frați sunt exprimate prin 4 numere naturale consecutive.

Cate bomboane a avut fratele cel mare? *Tinere sperante,Baia Mare 2010*

13. Aflați ultima cifră a numărului 12n + 2, stiind că $n \in N$, astfel incat nici unul dintre numerele n, 2n – 1, 3n – 1, 6n – 1 nu se divide cu 5.

14. Fie numărul $a = 9^{2010} - 8 \cdot 9^{2009} - 8 \cdot 9^{2008} - \ldots - 8 \cdot 9 - 9$, $b = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2011}$, $c = 48^{2011}$.

a)Este a + b pătrat perfect? Justificați.

b)Să se scrie numărul c ca sumă dintre două pătrate perfecte si două cuburi perfecte.

Tinere sperante,Baia Mare 2010

15. Fie $A = 2 \cdot 5^{2n+1} \cdot 12^{n+1} + 2^{2n} \cdot 15^n \cdot 5^{n+1} - 10^{2n+1} \cdot 3^{n+2}$.

a) Aflati restul impărțirii lui A la 23.

b) Determină numărul de zerouri cu care se termină A.

Angela Ion

16. Aflați ultimele trei cifre ale numărului $n = 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{2008}$.

Ileana Bizău, Ioan Bizău

17. Demonstrați că un număr natural care se scrie in baza 10 folosind doar cifrele 1 , 3 si 5 nu poate fi pătrat perfect. *G.M.*

18. Determinați restul impărțirii numărului natural n prin 4, stiind că numărul $3^n + 4^n$ este multiplu de 5.

Supliment G.M.2010

19. Numărul natural n se numeste **generos** dacă suma cifrelor lui este mai mare decat suma cifrelor numărului n + 2. Aflati suma tuturor numerelor **generoase** de două cifre. *Luminita Bucuresteanu*

20. Cate numere naturale impare impărțite la 74 dau restul de trei ori mai mare decat catul? (Justificați răspunsul).

Sorin Furtună

TEMA

CLASA a -V- a

1. Determinați cifrele a,b,c,d,e proprietatea că $\overline{abc}^{\overline{abc}}$ = $2^{\overline{cde}}$.

OLM,Timis 2009,prof.Andrei Eckstein

2. Determinați numerele naturale a, $\overline{bcd}$ si e , stiind că: 4· ($2^{2a} \cdot 3^{a}$ + $\overline{bcd}$) + 2^{e} =2013.

OLM,Iasi 2013,prof.Alice Anița

3. Să se afle restul impărțirii numărului $5^{7^{n}}$ prin 31, n $\in N$.

OLM,Galați 2009,prof.Cornel Haihui

4. Daca 8n + 1 si 6n + 4 sunt pătrate perfecte, aflați restul impărțirii lui n la 5, n $\in N^{*}$.

OJM,Brasov 2010,prof.Camelia Postolache

5. Să se arate ca dintre 4 cuburi perfecte putem alege două a căror diferență se divide cu 7.

6. Suma a 30 de numere naturale pare si nenule este 328.

a) Sa se dea un exemplu de numere ce indeplinesc condițiile de mai sus.

b) Găsiți 30 de numere, printre care avem exact o grupă cu patru termeni egali, care satisfac condițiile problemei.

c) Arătați ca oricum alegem numere ce satisfac toate condițiile problemei, vom avea cel puțin patru numere egale intre ele.

Florica Campan,Iasi 2011

7. a) Suma a 30 de numere naturale impare distincte este egala cu 902. Arătați că cel puțin unul dintre numere este mai mare decat 60.

b) Se consideră numerele naturale a =2 + 4 + 6 + …..+ 902 si b = 11 + 22 + 33 + …+ 902. Arătați ca a + b + 3 nu este pătrat perfect.

17 ianuarie 2015