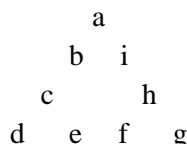


Lecția X  
Clasa a V-a  
Probleme pregătitoare pentru Olimpiada de matematică

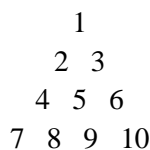
1. Suma cifrelor unui număr natural este 23, iar câtul împărțirii sale la 9 este 96. Să se afle numărul.
2. În câte zerouri se termină numărul ?

$$N = 1^{2^3 4^5 6} \cdot 2^{3^4 5^6 1} \cdot 3^{4^5 6^1 2} \cdot 4^{5^6 1^2 3} \cdot 5^{6^1 2^3 4} \cdot 6^{1^2 3^4 5} ?$$

3. Numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sunt așezate într-un tablou triunghiular ca în figura de mai jos. Dacă suma numerelor de pe fiecare latură este 20, să se arate că numărul 5 este unul din vârfuluri.



4. Determinați cel mai mic număr scris în baza 10, numai cu cifrele 0 și 1, divizibil cu 225.
5. Arătați că numerele 1,2,3,...,16 nu pot fi aranjate pe un cerc astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie pătrat perfect. Este posibilă o astfel de aranjare pe o linie? Justificați.
6. Să se scrie numărul  $2003^{2003}$  ca suma de 2003 numere naturale consecutive.
7. Se consideră tabloul:



.....

- a) Cu ce număr începe al 100-lea rând?
  - b) Care este suma numerelor din rândul 100?
  - c) În al câtelea rând se află numărul 100?
8. Un număr natural se numește “simpatice” dacă este format din cifre distincte nenule și a căror sumă se divide cu 10.
    - a) Determinați cel mai mic și cel mai mare număr “simpatice”.
    - b) Precizați câte numere de trei cifre sunt “simpatice” și divizibile cu 4.
  9. Dacă  $a \in N^*$  și  $b \in N^*$ , atunci notăm  $a * b$  numărul  $a^b + b^a$ . (Ex:  $3 * 2 = 3^2 + 2^3 = 17$ ).
    - a) Determinați numărul natural  $n \in N^*$  astfel încat :
$$1 * 1 + 2 * 1 + 3 * 1 + \dots + n * 1 = 54$$
    - b) Comparați numerele  $3 * 18$  și  $2 * 27$ .
    - c) Aflați ultima cifră a numărului  $2 * (2 * 2008)$ .
  10. Considerăm mulțimea  $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \mid a, b, c \in N\}$ . Arătați că printre oricare 9 elemente ale mulțimii  $A$  există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.
  11. Fie numerele naturale  $a$  și  $b$  astfel încât  $2a + 3b$ ,  $2a + 4b$ ,  $2a + 5b$  nu se divid prin 3. Arătați că  $b$  este divizibil cu 3 și că  $a$  nu este divizibil cu 3.
  12. Suma a zece numere naturale nenule distincte este 108. Demonstrați că printre ele există cel puțin două numere impare.
  13. Dacă  $a, b, c$  sunt numere naturale încat  $7a + 2b = 5c$ , arătați că  $N = (a + b)(b + c)(a + c)$  se divide cu 70.

14. Se dau numerele  $A = \overline{abcde}$  și  $B = \overline{bcdea}$ . Arătați că dacă  $A$  este divizibil cu 41 atunci și  $B$  este divizibil cu 41.
15. Demonstrați că numărul natural  $A = 15^n + 12^n + 5^n + 4^n + 3^n + 1$  este divizibil cu  $3^n + 1$ , oricare  $n \in \mathbb{N}$ .
16. Arătați că există o infinitate de numere naturale  $n$  astfel încât  $n + 1, n + 2, n + 3, n + 4$  să fie simultan compuse.
17. Demonstrați că există 2015 numere naturale consecutive compuse.
18. La o masă circulară sunt așezate 7 persoane. Vârsta fiecăreia este media aritmetică a vârstelor persoanelor alăturate. Arătați că suma vârstelor tuturor persoanelor este multiplu de 7.
19. În Neverland există 3 corabii cu pirați. Dacă un călător care ajunge pe o corabie și are la el un număr par de galbeni, căpitanul îi mai dă 3 galbeni, iar dacă are un număr impar de galbeni, căpitanul îi ia 1 galben și încă jumătate din cei rămași. După ce Peter Pan trece pe la fiecare din cele 3 corabii, rămâne cu 502 galbeni. Aflați câți galbeni a avut la început, știind că numărul acestora era par.
20. Avem cele 5 cercuri olimpice. Ele formează nouă regiuni distincte: cinci regiuni acoperite de câte un singur cerc și patru regiuni acoperite de câte două cercuri. Plasați în aceste regiuni cifrele 1, 2, ..., 9 astfel încât:
  - a) Fiecare cifră să fie utilizată o singură dată;
  - b) Suma cifrelor din fiecare inel este o valoare fixată  $S$ ;
  - c)  $S$  are valoarea maximă.

#### Tema

1. a) Demonstrați că oricare ar fi  $n$  număr natural nenul, numărul  $A = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$  este divizibil cu 13. b) Arătați că numărul  $a = 15 + 3^{2014}$  se divide cu 24.
2. Să se demonstreze că numărul natural  $\overline{abcdef}$  se divide cu 7 dacă și numai dacă  $\overline{def} - \overline{abc}$  se divide cu 7.
3. Arătați că  $A = (2n + 1)(4n + 1)(5n + 3)$  este divizibil cu 3 oricare ar fi numărul natural  $n$ .
4. Să se arate că oricum am alege cinci numere naturale de forma  $n^4$ , printre ele există cel puțin două a căror diferență este divizibilă cu 10.
5. Scriem pe un rand (ceva mai lung !) toate numerele de la 0 la 2005. Începând cu 0, tăiem toți multiplii de 2, apoi toți multiplii de 3, apoi toți multiplii de 5 (unele numere vor fi tăiate de mai multe ori !). Câte numere rămân netăiate?
6. Comparați numerele:  $a = 8^{222} - 3 \cdot 4^{332} - 2^{663}$  și  $b = 3^{500} - 2 \cdot 3^{499} - 2 \cdot 3^{498} - \dots - 2 \cdot 3^{443} - 2 \cdot 3^{442}$ .
7. Determinați ultima cifră a numărului  $M = (n + 1)(n + 4)(n + 7)(n + 10)(n + 13)$ ,  $n$  număr natural.

#### Bibliografie:

Colecția GMB 2000-2014  
Colecția RMT 2008-2012  
Concursul de matematică Florica Câmpan 2008-2013