Profesor Mioara Cărnaru
Șc. gim. Spectrum Constanța

Lecția X
Clasa a V-a
Probleme pregătitoare pentru Olimpiada de matematică

1. Suma cifrelor unui număr natural este 23, iar câtul împărţirii sale la 9 este 96. Să se afle numărul.
2. În câte zerouri se termină numărul ?

$$N = 1^{2^{3^{4^{5^{6}}}}} \cdot 2^{3^{4^{5^{6^{1}}}}} \cdot 3^{4^{5^{6^{1^{2}}}}} \cdot 4^{5^{6^{1^{2^{3}}}}} \cdot 5^{6^{1^{2^{3^{4}}}}} \cdot 6^{1^{2^{3^{4^{5}}}}} \ ?$$

3. Numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sunt aşezate într-un tablou triunghiular ca în figura de mai jos. Dacă suma numerelor de pe fiecare latură este 20, să se arate că numărul 5 este unul din vârfuri.

a
b i
c h
d e f g

4. Determinaţi cel mai mic număr scris în baza 10, numai cu cifrele 0 şi 1, divizibil cu 225.
5. Arătaţi că numerele 1,2,3,...,16 nu pot fi aranjate pe un cerc astfel încât suma oricăror două numere vecine sa fie pătrat perfect. Este posibilă o astfel de aranjare pe o linie? Justificaţi.
6. Să se scrie numarul 2003^{2003} ca suma de 2003 numere naturale consecutive.
7. Se consideră tabloul:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
…………………………..

a) Cu ce număr începe al 100-lea rând?
b) Care este suma numerelor din rândul 100?
c) În al câtelea rând se află numărul 100?

8. Un număr natural se numeşte “simpatic” dacă este format din cifre distincte nenule şi a căror sumă se divide cu 10.
a) Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare număr “simpatic”.
b) Precizaţi câte numere de trei cifre sunt “simpatice” şi divizibile cu 4.
9. Dacă $a \in N^*$ şi $b \in N^*$, atunci notăm $a * b$ numărul $a^b + b^a$. (Ex: $3 * 2 = 3^2 + 2^3 = 17$).
   a) Determinaţi numărul natural $n \in N^*$ astfel încat :
   $1 * 1 + 2 * 1 + 3 * 1 + \cdots + n * 1 = 54$
   b) Comparaţi numerele $3 * 18$ şi $2 * 27$.
   c) Aflaţi ultima cifră a numărului $2 * (2 * 2008)$.

10. Considerăm mulţimea $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \,|a, b, c \in N\}$. Arătaţi că printre oricare 9 elemente ale mulţimii A există cel puţin două al căror produs este pătrat perfect.
11. Fie numerele naturale a şi b astfel încât 2a + 3b, 2a + 4b, 2a + 5b nu se divid prin 3. Arătaţi că b este divizibil cu 3 şi că a nu este divizibil cu 3.
12. Suma a zece numere naturale nenule distincte este 108. Demonstraţi că printre ele există cel puţin două numere impare.
13. Dacă a, b, c sunt numere naturale încat $7a + 2b = 5c$, arătaţi că $N = (a + b)(b + c)(a + c)$ se divide cu 70.

14. Se dau numerele $A = \overline{abcde}$ şi $B = \overline{bcdea}$. Arătaţi că dacă A este divizibil cu 41 atunci şi B este divizibil cu 41.
15. Demonstraţi că numărul natural $A = 15^n + 12^n + 5^n + 4^n + 3^n + 1$ este divizibil cu $3^n + 1$, oricare $n \in N$.
16. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n astfel încat $n+1, n+2, n+3, n+4$ să fie simultan compuse.
17. Demonstraţi că există 2015 numere naturale consecutive compuse.
18. La o masă circulară sunt aşezate 7 persoane. Vârsta fiecăreia este media aritmetică a vârstelor persoanelor alăturate. Arătaţi că suma vârstelor tuturor persoanelor este multiplu de 7.
19. În Neverland există 3 corabii cu piraţi. Dacă un călător care ajunge pe o corabie și are la el un număr par de galbeni, căpitanul îi mai dă 3 galbeni, iar dacă are un număr impar de galbeni, căpitanul îi ia 1 galben şi încă jumătate din cei rămaşi. După ce Peter Pan trece pe la fiecare din cele 3 corabii, rămâne cu 502 galbeni. Aflaţi câţi galbeni a avut la început, ştiind că numărul acestora era par.
20. Avem cele 5 cercuri olimpice. Ele formează nouă regiuni distincte: cinci regiuni acoperite de câte un singur cerc şi patru regiuni acoperite de câte două cercuri. Plasaţi în aceste regiuni cifrele 1, 2, …, 9 astfel încât:
a) Fiecare cifră să fie utilizată o singură dată;
b) Suma cifrelor din fiecare inel este o valoare fixată *S*;
c) S are valoarea maximă.

Tema

1. a) Demonstraţi că oricare ar fi n număr natural nenul, numărul $A = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ este divizibil cu 13. b) Arătaţi că numărul $a = 15 + 3^{2014}$ se divide cu 24.

2. Să se demonstreze că numărul natural $\overline{abcdef}$ se divide cu 7 dacă şi numai dacă $\overline{def} - \overline{abc}$ se divide cu 7.

3. Arătaţi că A = (2*n* + 1)(4*n* + 1)(5*n* + 3) este divizibil cu 3 oricare ar fi numărul natural *n*.
4. Să se arate că oricum am alege cinci numere naturale de forma n^4, printre ele există cel puţin două a căror diferenţă este divizibilă cu 10.
5. Scriem pe un rand (ceva mai lung !) toate numerele de la 0 la 2005. Începând cu 0, tăiem toţi multiplii de 2, apoi toţi multiplii de 3, apoi toţi multiplii de 5 (unele numere vor fi tăiate de mai multe ori !). Câte numere rămân netăiate?
6. Comparaţi numerele: $a = 8^{222} - 3 \cdot 4^{332} - 2^{663}$ şi $b = 3^{500} - 2 \cdot 3^{499} - 2 \cdot 3^{498} - ... - 2 \cdot 3^{443} - 2 \cdot 3^{442}$.
7. Determinaţi ultima cifră a numărului M = (*n* + 1)(*n* + 4)(*n* + 7)(*n* + 10)(*n* + 13), n număr natural.

Bibliografie:

Colecţia GMB 2000-2014
Colecţia RMT 2008-2012
Concursul de matematică Florica Câmpan 2008-2013