PROBLEME PROPUSE PENTRU CICLUL GIMNAZIAL [2)]

CLASA a V-a

1. Pe un cerc sunt 2014 numere naturale astfel încat orice număr este media aritmetică a celor două numere cu care se învecinează. Arătați că media aritmetică a celor 2014 numere este tot un număr natural.

Gheorghe Crăciun, Ploiești

2. Să se compare numerele
$a = 5^{205} - 3\cdot 5^{204} - 3^2 \cdot 5^{203} - 4\cdot 5^{202}$ şi $b = 3 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + ... + 2\cdot 3^{302}$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

3. Un autocar cu excursionişti parcurge un drum în patru zile . În prima zi parcurge $\frac{1}{4}$ din drum , a doua zi $\frac{2}{3}$ din ce a rămas , a treia zi $\frac{1}{2}$ din noul rest , iar a patra zi ultimii 60 km . Câţi km a avut drumul şi câţi a parcurs în fiecare zi autocarul ?

Laora Cicșa, Șanț, Bistrița-Năsăud

4. Considerăm numerele $a = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ și
$b = \frac{21}{2} + \frac{61}{6} + \frac{121}{12} + \frac{201}{20} + ... + \frac{10n(n+1)+1}{n(n+1)}$ Arătați că 10 divide(b-a).

Dan Coma, Vădăstrița, Olt

5. La o pensiune 100 de elevi ocupă 32 camere, unele cu două paturi, altele cu 5 paturi. Câte camere de fiecare fel s-au ocupat?

Iancu Veronica, Ploiești

6. Dacă $n! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot n$ *atunci* $1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} - ... - \frac{2013}{2014!} = \frac{1}{2014}$

Dan Coma, Vădăstrița, Olt

7. Să se calculeze produsul numerelor natural a, b, c ştiind că sunt verificate simultan condiţiile a + b = 64, a· c = 671 iar b· c = 33.

Eugeniu Blăjuț ,Bacău

8. Fie mulțimea $A = \{1,2,3,...,50\}$. Să se demonstreze că există o submulțime B a lui A cu cel puțin 20 de elememnte asfel încat suma oricăror două elemente din B nu este divizibilă cu 7.

Cătălin Năchilă, Ploieşti

9. Aflați produsul ultimelor 3 cifre ale numărului n=53 !+1961.

Dorina Stoica , Mircea MarioStoica, Arad

10. Arătați că nu există numere naturale *n* pentru care
$n^2 - 22^{1986} = 1 + 2 + ... + 1985 + 1986 - n$

Dorina Stoica , Mircea MarioStoica, Arad

2) Se primesc soluţii pană **la 15 iunie 2014**

CLASA a VI-a

1. În interiorul triunghiului ABC în care m(∢B) = 30° iar m(∢C) = 45° se consideră punctul D astfel încât m(∢DBC) = m(∢DCB) = 15°. Să se calculeze măsura unghiului BAD şi să se arate că triunghiul CAD este isoscel.

Eugeniu Blăjuț ,Bacău

2. Determinaţi numerele naturale nenule a,b,c pentru care

$$a \cdot 0{,}08(3) = b^3 \cdot 0{,}01041(6) = c^2 \cdot 0{,}013(8)\ si\ 2a^3 = 3b^2c^3$$

Maria Negrilă,Anton Negrilă, Ploiești

3. Să se determine cel mai mic număr natural divizibil cu 18 care are exact 18 divizori naturali.

Petre Năchilă, Ploiești

4. Aflați numerele a,b,c direct proporționale cu 1,2 respectiv 3 astfel încat

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 384$$

Nicolae Ivășchescu, Craiova

5. Să se arate că

$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_5} < 1$, unde $n_1, n_2, \ldots, n_5$ sunt numere impare consecutive mai mari decat 1.

Veronica Iancu, Ploiești

6. Fie șirul: 10; 17; 24; 31; 38; ….Determinați termenul de pe locul al 2013-lea.

Liviu Ardelean, Sibiu

7. Pe latura AB a triunghiului ABC în care m(∢B) = 20° iar m(∢C) = 10°, se construieşte triunghiul echilateral ABD, astfel încât D şi A să fie de aceeaşi parte a dreptei BC. Să se demonstreze că triunghiul BCD este isoscel

Eugeniu Blăjuț ,Bacău

8. Fie $\overline{abcde}$ un număr natural format din cifre distincte a căror sumă este 28.Arătați că :

a) Cel puțin una dintre cifre este divizibilă cu 3;

b) Cel puțin una dintre cifre este divizibilă cu 2.

Gh.Crăciun, Ploiești

9. Să se arate că nu există numere naturale x şi y pentru care expresia 7x + 13y să fie divizibilă cu 17 iar 4x + 5y = 2013.

Eugeniu Blăjuț ,Bacău

10. Să se arate că numărul $a = 49^n \cdot 3^{n+1} \cdot 34 + 7^{2n+1} \cdot 3^{n+1} + 7^{2n} \cdot 3^n \cdot 20$ este divizibil cu 3003 oricare ar fi numărul natural nenul n.

Adelina Apostol, Ploieşti

11. Se consideră numerele naturale a, b şi c ∈ **N*** cu proprietatea: $\frac{a}{b} = \frac{5b}{c} = \frac{8c}{5a}$.

a) Determinaţi cât la sută din b reprezintă a, respectiv c.

b) Determinaţi a, b şi c astfel ca a+b+c > 100 şi $a^2+b^2+c^2 < 4600$.

Petre Năchilă,Ploiești

CLASA a VII-a

1. Fie: $E = (a+1)(b+2)(c+3)(d+4)$, unde a, b, c, d sunt numere reale pozitive astfel încât: $ab = 2$ şi $cd = 27$. Arătaţi că $E \geq 576$

Ioniţă Samuel, Bărcăneşti

2. Prin I, punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor triunghiului ABC în care m(∠B) = 2· m(∠A), se construieşte paralela ID la AB, D ∈ (AC). Ştiind că [AI] ≡ [CD], să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

3. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n, pentru care $\sqrt{4n+1}$ este tot un număr natural.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

4. Printr-un punct oarecare D situat pe latura BC a triunghiului ABC se duce paralela la mediana AM (M∈ BC), care intersectează dreptele AB şi AC în punctele E respectiv F. Demonstraţi că a) AE·AC = AB·AF b) DE + DF = constant

***

5. Rezolvați ecuația x+28{x}=[x] , x număr rațional, iar{x} reprezintă partea fracționară a lui x și[x] partea intreagă a lui x.

Doina Stoica, Arad

6. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuația $|x|+|y|<4$.

Mircea Mario Stoica, Arad

7. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația :

$$x^2+y^2-2\sqrt{1961}x-44y+2445=0$$

Mircea Mario Stoica, Arad

8. a) Dacă x, y şi z sunt numere reale şi x < y < z, demonstraţi că $\frac{z-x}{y-x}+\frac{z-x}{z-y}\geq 4$.

b) Arătaţi că $\frac{1}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}\geq\left(\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)^2$.

Nicolae Angelescu, Ploiești

9. a) Calculaţi: $1{,}5\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{63}}\right)\cdot\left[\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)^{-1}-\frac{\sqrt{11}}{4}\right]$

b) Găsiţi un număr real x, care verifică condiţiile: 1 < x < 2 şi $x\cdot\frac{1}{4\sqrt{11}}\in Q$.

Nicolae Angelescu, Ploiești

10. Fie M un punct interior pătratului ABCD astfel încât triunghiul ABM să fie echilateral. Fie punctul N pe semidreapta (DM astfel încât m (∢CNM) = 15^0.

a) Demonstraţi că [NC] ≡ [AB] şi [BM] ≡ [BN].

b) Dacă BM ∩ CN = {Q}, demonstraţi că punctele Q, A şi D sunt coliniare.

Petre Năchilă, Ploiești

11. Fie trapezul dreptunghic ABCD cu: m(∢A) = m(∢D) = 90^0, m(∢ABC) = 60^0, BC = 6 cm, CD = 9 cm şi perimetrul egal cu $27+3\sqrt{3}$ cm. Arătaţi că AC⊥BC şi aflaţi lungimea diagonalei AC.

Maria şi Anton Negrilă, Ploiești

CLASA a VIII-a

1. Determinaţi numerele reale x şi y care verifică egalitatea:

$$3(2x^2-2x+1)(3y^2-2y+3)-4=0$$

Ioniţă Samuel, Bărcăneşti

2. Să se determine numerele reale x astfel încât $2008\cdot[x]$, $2009\cdot[x]$ şi $[2009x]$ să fie trei numere pare consecutive, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Ion Preda şi Lucica Preda, Râmnicu-Vâlcea

3. Demonstraţi că :

a) $\frac{a+2}{a} < \frac{a+1}{a-1}$, pentru orice a > 1. b) $\sqrt{\frac{2007^2+2007}{2008^2+2008}}$

Bilciurescu Ion , Boldeşti-Scăieni

4. Pe planul trapezului dreptunghic ABCD cu AB || CD, m(A) =m(D) =90^0,DC= a, AB= 2a si AC $\perp$ BD, se ridică perpendiculara MA =a$\sqrt{2}$ .Calculaţi distanţa de la B la MC şi distanţa de la A la planul (MBC).

Ion Lupea şi Ion Tomescu Ploieşti

5. În vârful A al dreptunghiului ABCD se ridică, pe planul acestuia perpendiculara AM. Se construiesc perpendicularele AP şi AQ astfel încât AP$\perp$BM, AQ$\perp$DM (P$\in$BM; Q$\in$DM). Să se arate că PQ$\perp$MC.

Ioana Oprea si Dumitru Oprea, Dragodăneşti, Dâmboviţa

6. Paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' are laturile AD = AA' = a şi AB = 2a. Punctul E este proiecţia punctului A pe diagonala BD'. Calculaţi:
a) Măsura unghiului diedru format de planele (D'AB) şi (BCD).
b) Aria triunghiului AD'B.
c) Lungimea segmentului C'E.

Magdalena-Maria Georgescu şi Mihail Focşeneanu,Ploieşti

7. Arătați că numerele de forma $\overline{abcd5}\cdot\overline{abcd3}+1$ sunt pătrate perfecte.

Mariana Stoica, Brașov

8. Fie h înălţimea unui tetraedru regulat iar h_1, h_2, h_3, h_4 distanţele de la un punct oarecare din interiorul tetraedrului la feţele sale. Să se arate că:

a) $h_1+h_2+h_3+h_4=h$.

b) $\frac{h-h_1}{h+h_1}+\frac{h-h_2}{h+h_2}+\frac{h-h_3}{h+h_3}+\frac{h-h_4}{h+h_4}\geq\frac{12}{5}$.

9. Se consideră 2008 numere naturale nenule cu proprietatea că suma inverselor lor este mai mare sau egală cu 11.Arătaţi că cel puţin două dintre cele 2008 numere sunt egale.

Artur Bălăucă, Iași

10. Arătați că $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}+\sqrt{4\sqrt{3\sqrt{2}}}<5,5$.

Felicia Ozunu,Vulcan,Hunedoara