Cercul Judeţean de Excelenţă la Matematică Constanţa

Adriana Daniela Gurgui, profesor, Liceul Teoretic "Ovidius", Constanţa

Clasa a VI-a. Lecţia 8
25.01.2014

Probleme de sinteză. Pregatire pentru olimpiadă

1. Demonstraţi că nu există numerele prime p şi q astfel încât $p^2+2013=2^q$.

2. Determinaţi valoarea numărului natural n ştiind că numărul n^n are n cifre.

3. Demonstraţi că orice număr întreg $n>6$ se poate scrie sub forma $n=a+b$, unde $a, b\in\mathbf{N}$, $a,b\geq 2$ şi $(a, b) = 1$.

4. Fie o mulţime de numere întregi $A=\{a_1,a_2,a_3,...,a_{n+1}\}$. Demonstraţi că exista o submulţime a sa cu suma elementelor divizibilă cu n.

5. Demonstraţi că dacă n este număr natural şi $n\geq 2$, atunci numărul $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ nu este întreg.

6. Din şirul $\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},\frac{1}{3\cdot 4},...,\frac{1}{(n-1)\cdot n},...$ determinaţi grupul de termeni consecutivi a căror sumă este egală cu $\frac{1}{3}$.

7. Fie fracţia $F=\frac{2n+7}{5n+3}$ în care n este număr natural. Demonstraţi că:

a) dacă fracţia este reductibilă, atunci $n\geq 11$;

b) dacă $n_1,n_2,n_3,...,n_{2012}$ sunt valori ale numărului n pentru care fracţia este reductibilă, atunci suma $n_1+n_2+n_3+...+n_{2012}$ nu se divide cu 29.

8. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $xy=3x+2y-8$.

9. Cu câte zerouri se termină produsul numerelor $a=2^{12}\cdot 5^{100}\cdot 7^{10}$ şi $b=2\cdot 4\cdot 6\cdot...\cdot 100$?

10. Dacă a este un număr raţional şi $a>1$, demonstraţi că există numerele naturale m şi n astfel ca $a=\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{1}{m^2+1}\right)...\left(1+\frac{1}{m^2+n}\right)$.

11. Demonstraţi că dacă numerele naturale nenule a, b şi c verifică relaţia $\frac{3a-b}{2a+5b}=\frac{3b-c}{2b+5c}=\frac{3c-a}{2c+5a}$, atunci $a=b=c$.

12. Fie numărul natural $A=a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_{2012}^2$, unde $a_1,a_2,a_3,...,a_{2012}$ sunt numere prime, mai mari sau egale cu 5. Demonstraţi că numărul $B=2\cdot A+2013$ nu este pătrat perfect.

13. Prin mijlocul M al segmentului $[AB]$ considerăm o dreaptă care intersectează perpendicularele în A şi B pe dreapta AB în punctele P şi respectiv Q.

- **a)** Demonstraţi că $[AP]\equiv[BQ]$.
- **b)** Dacă $N\in AP$ astfel încât $MN\perp PQ$, demonstraţi că $(QP$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BQN$.

14. Fie pătratul $ABCD$. Se consideră punctele $M\in(BC)$ şi $N\in(CD)$ astfel încât $(MA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MNB$ **.** Demonstraţi că $(NA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DNM$ şi că m($\sphericalangle NAM$) $=45^0$. Reciproc, demonstraţi că dacă $M\in(BC)$, $N\in(CD)$ şi m($\sphericalangle NAM$) $=45^0$, atunci $(MA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle NMB$ şi $(NA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DNM$.

(Precizare: laturile pătratului sunt congruente între ele şi cele patru unghiuri sunt drepte.)

15. Două unghiuri complementare au măsurile în grade egale cu a şi b ($a;b\in N^*$) direct proporţionale cu numerele prime p_1 şi p_2. Dacă $\frac{a+b}{p_1+p_2}$ este număr natural par, calculaţi măsurile celor două unghiuri.

16. Fie triunghiul echilateral ΔABC şi punctul D pe semidreapta opusă semidreptei $(BC$ astfel încât $[DB]\equiv[BC]$. Considerăm punctul E în semiplanul determinat de dreapta AD ce nu conţine punctul B, astfel încât distanţa de la E la AB este egală cu EA, distanţa de la E la DC este egală cu ED şi $EA=$ $=ED$, iar punctul F astfel ca $D\in(BF)$ şi $[FD]=[BC]$.

- **a)** Demonstraţi că $\Delta FDE\equiv\Delta BAE$.
- **b)** Demonstraţi că $[EB$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AED$.

17. Punctele *A*, *B*, *C* şi *D*, în această ordine, aparţin dreptei *d* astfel încât $[AB]\equiv[CD]$. Fie *E* un punct exterior dreptei *d* astfel încât $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle EDA$. Dacă *M* este mijlocul segmentului $[EA]$ şi *N* este mijlocul segmentului $[ED]$, demonstraţi că:

a) $[AM]\equiv[DN]$ şi $[AN]\equiv[DM]$.

b) $\Delta AMB \equiv \Delta DNC$.

c) $\Delta CAN \equiv \Delta BDM$.

18. Fie triunghiul isoscel *ABC* cu $[AB]\equiv[AC]$, punctul *M* mijlocul laturii $[AC]$ şi *D* un punct oarecare pe semidreapta $(BM$, în ordinea $B-M-D$ astfel încât $[AD]\equiv[AC]$. Dacă punctul *E* este mijlocul laturii $[AB]$ şi punctul *F* este mijlocul segmentului $[AD]$, demonstraţi că:

a) $\Delta AEC \equiv \Delta AMB$;

b) $BD = CF + CE$.

19. Pe dreapta *d* considerăm punctele *A*, *B*, *C*, *D* şi *E* astfel încât $[AB]\equiv[BC]\equiv[CD]\equiv[DE]$. Fie *M* un punct exterior dreptei *d* astfel încât distanţa de la punctul *B* la dreapta *MA* este egală cu distanţa de la punctul *D* la dreapta *ME*. Demonstraţi că distanţele de la punctul *C* la dreptele *MA* şi *ME* sunt egale între ele.

20. Fie punctele distincte *A*, *B*, *C*, *D* şi *O* astfel încât $OA \perp OC$, $B \in \mathrm{Int}(\sphericalangle AOC)$ şi $[OM \perp [ON$, unde $[OM$ şi $[ON$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COD$. Demonstraţi că:

a) $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$;

b) $OB \perp OD$.

Temă pentru acasă: problemele: 10, 11, 12, 17, 18, 19 şi 20.

BIBLIOGRAFIE.

1. Artur Bălăucă – OLIMPIADE, CONCURSURI ŞI CENTRE DE EXCELENȚĂ - clasa a VI-a,
   Editura Taida , Iaşi , 2012.
2. Ion Damian Bîrchi (coordonator) - OLIMPIADELE ŞI CONCURSURILE DE MATEMATICĂ V- VIII – 2011
   Editura Bîrchi Timişoara , 2011.
3. Laurenţiu Panaitopol, Dinu Şerbănescu, PROBLEME DE TEORIA NUMERELOR ŞI COMBINATORICĂ pentru juniori

Editura GIL , 2003
4. Colecţia Gazeta Matematică.
http://www.mategl.com/download.htm

Cercul Judeţean de Excelenţă la Matematică
Constanţa **prof. Alina Dermengiu,**
Liceul Teoretic "Traian"Constanţa

Clasa a VI-a. Lecţia 9
01.03.2014

Probleme de sinteză. Pregatire pentru olimpiadă

1. Se consideră numerele $a_1 = 3, a_2 = 2a_1 + 3, a_3 = 2a_2 + 3^2, a_4 = 2a_3 + 3^3, ..., a_{100} = 2a_{99} + 3^{99}$.

a) Scrie ca puteri cu aceeaşi bază, numerele a_1, a_2, a_3, a_4, a_5;

b) Află numărul x din egalitatea : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_5 - x$;

c) Compară a_{100} cu $3 \cdot 2^{165}$;

d) Calculati suma $A = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + ... + 101a_{100}$

2. Fie $A \subset N^*$ o mulţime cu 2006 elemente şi $B = \left\{ \frac{1}{x} \middle| x \in A \right\}$.

a) Să se determine produsul elementelor mulţimii $A \cup B$.

b) Să se determine elementele mulţimii $A \cup B$ ştiind că elementele mulţimii A sunt numere naturale consecutive nenule şi că $\frac{S}{1003} - 2007 < 0$, unde S este diferenţa dintre suma elementelor mulţimii A şi suma elementelor mulţimii B.

3) Pentru $a, b \in N^*$ se consideră fracţia $f = \frac{a+b+1}{ab+a}$.

a) Scrieți f ca sumă de două fracţii cu numitorii diferiţi;

b) Aflați a şi b știind că a este număr prim şi $f = \frac{b}{a}$.

4) Câturile împărțirilor succesive pentru aflarea c.m.m.d.c. a două numere sunt trei numere pare succesive a căror sumă este 12. Cel mai mare divizor comun al celor două numere este15. Să se afle cele două numere.

5. Se consideră un număr natural prim p.

a) Arătați că, dacă $p > 3$, atunci numărul $m = 2p^2 + 1$ este compus;

b) Determinați toate numerele naturale prime p cu proprietatea că numărul $m = 2p^2 + 1$ este pătrat perfect.

6. O mulţime M de numere raţionale are următoarele proprietăţi :

i) $6 \in M$ și $12 \in M$;

ii) dacă $x \in M$ și $y \in M$ atunci $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \right) \in M$

iii) dacă $(2x + 3y) \in M$, atunci $(x + y) \in M$.

Arătaţi că :

a) Mulţimea M conţine cel puţin două numere naturale consecutive;

b) Mulţimea M conţine cel puţin trei numere prime;

c) Există $a, b, c, d \in M$, distincte două câte două, astfel încât $a + b = c + d$.

7. Într-un șir de numere , suma oricăror patru termeni consecutivi este 30. Se știe că primul număr este 7, al treilea este 9, iar al zecelea este 6. Să se afle al 2014-lea număr și suma primilor 2014 termeni ai șirului.

8. a) Calculați $S=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots\frac{49}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 99}$

b) Calculați $S=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2012\cdot 2014}$

9. Fie n un număr natural $n\geq 2$ și a, b doi divizori ai lui n pentru care $b>a$. Demonstrați că $b>a+\frac{a^2}{n}$.

10. Fie mulțimile $A=\{x\in\mathbf{N}|4x-5y+7=0\}$ și $B=\{y\in\mathbf{N}|4x-5y+7=0\}$.

a) Arătați că elementele mulțimii $A\cup B$ nu sunt pătrate perfecte;

b) Calculați $A\cap B$.

11. Se aleg la întâmplare 9 divizori diferiți doi câte doi ai numărului 2^{2010} și se așează în cele 9 pătrățele ale unui tabel ce conține 3 linii și trei coloane într-o ordine oarecare. Să se arate că sumele numerelor de pe fiecare linie, coloană sau diagonală din tabel sunt distincte două câte două.

12. Pe un cerc sunt înscrise în ordine numerele 1, 2, 3, 4, ..., 2003. unele dintre acestea se elimină după următorul procedeu: tăiem un număr, sărim un număr, tăiem două numere, sărim două numere, tăiem trei numere, sărim trei numere,...Continuăm procedeul până când rămân mai puține numere decât ar trebui tăiate. Câte numere au rămas?

13. Fie $a=2014!+2013!+\ldots+3!+2!$, unde pentru $n\in\mathbf{N}^*$ am notat $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ și $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_p}$ reprezentarea lui a în baza 10, $n\in\mathbf{N}^*$. Dacă $\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}+\overline{a_5a_6}+\ldots$ (ultimul termen fiind format din una sau două cifre) $p\in\mathbf{N}^*$. Să se arate a și s nu sunt pătrate perfecte.

14. Să se arate că simetricele a trei puncte coliniare distincte față de un alt punct sunt coliniare.

15. Fie triunghiul oarecare ABC, cu AC< BC și punctele D$\in$(BC), C$\in$(AE) astfel încât BD=AC=CE . Dacă $\angle$ACB are măsura de 60°, demonstrați că AB =DE.

16. In triunghiul ABC, $(AD$ bisectoarea unghiului $\angle BAC$, $D\in(BC)$, $DE\perp AC$, $E\in AC$, $DF\perp AB$, $F\in AB$ și $(CI$ bisectoarea unghiului $\angle ACB$, $I\in(AD)$. Notăm $\{M\}=DE\cap CI$. Dacă $MN\perp BC$, $N\in BC$, arătați că $DM=DF-MN$.

17. Pe latura [BC] a triunghiului isoscel ABC (AB=AC) se iau punctele interioare M şi N, M $\in$ (BN) astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NB} = k$. Arătaţi că :

a) $[AM] \equiv [AN]$;

b) $\frac{MN}{BC} = 1 - \frac{2k}{k+1}$

18. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu AB=AC. Fie D intersecția perpendicularei în B pe AB cu perpendiculara în C pe AC, $E \in BD$, astfel încât $D \in (BE)$ și ED=DB, iar F intersecția dreptei AC cu perpendiculara în E pe BE. Să se arate că $DF \perp CE$.

19. Se conidera triunghiul ABC și punctele $M \in (AC)$, $N \in (AB)$ astfel încât $(BN) \equiv (CM)$. Să se arate ca $(AO$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$, unde $\{O\} = MB \cap CN$ dacă și numai dacă ΔABC este isoscel.

20. Fie segmentul (AB). Să se arate că pentru orice punct $M \in (AB)$ exista o infinitate de perechi de puncte N, P astfel încât perimetrele triunghiurilor AMN și BMP să fie egale.

21. Fie o dreapta d si punctele $A \notin d$ si $B \notin d$. Să se determine poziția punctului N pe dreapta d astfel încât AN+NB să fie minimă.

22. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = x$, $BC = y$, $x < y$. Fie $(BD$ bisectoarea unghiului $\angle ABC$, $D \in (AC)$. Perpendiculara din C pe BD intersectează AB in E. Calculați perimetrul triunghiului ADE.

Temă pentru acasă: problemele: 2, 9, 14, 17, 16, 21 şi 22 .

1. Artur Bălăucă – OLIMPIADE, CONCURSURI ŞI CENTRE DE EXCELENȚĂ - clasa a VI-a, Editura Taida , Iaşi , 2012.
2. Petre Năchilă, Cătălin Eugen Năchilă-Exerciții si probleme pentru cercurile de matematică Editura Nomina , 2012.
3. Colecţia Gazeta Matematică.