Cercul Judeţean de Excelenţă la Matematică Constanţa **Mihai Contanu, profesor**

Clasa a V-a. Lecţia 8.

Probleme pregătitoare pentru Olimpiada Locală

1. Demonstraţi că numărul natural $\underbrace{444...44}_{2n cifre}-\underbrace{888...88}_{n cifre}$ este pătrat perfect.

2. Demonstraţi că numărul natural $n=\overline{3690369...0369}$ nu este pătrat perfect.

3. Scrieţi numărul 2008 ca suma a trei numere naturale pare şi cuburi perfecte.

4. Fie numărul natural $a=7+7^2+7^3+...+7^{2009}$.
a) Demonstraţi că numărul a nu este pătrat perfect.
b) Calculaţi restul împărţirii numărului a la 400.

5. Calculaţi valoarea numărului natural a şi valoarea cifrei b ştiind că $(a+3)\cdot\overline{200b}=a\cdot 2009$.

6. Pe tablă sunt scrise numerele naturale 2, 0, 0 şi 9. Putem şterge de pe tablă oricare două numere, scriind în loc succesorii acestora. Este posibil ca, în urma mai multor operaţii de acest fel, să obţinem patru numere egale?

7. Demonstraţi că numărul natural $n=3^{3^{2009}}-3^{3^{2008}}$ se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.

8. Calculaţi valorile numerelor naturale a şi n ştiind că $a^{2n}-9=8\cdot(9+9^2+9^3+...+9^{2009})$.

9. Calculaţi restul împărţirii numărului 2^{2015} la 3.

10. Calculaţi câtul şi restul împărţirii numărului $7\cdot 2^{2015}$ la $5\cdot 2^{2014}$.

11. Pe un raft al unei biblioteci sunt aşezate în ordine zece cărţi, astfel încât numărul de foi pentru două cărţi “vecine” să difere cu 1. Pot fi pe raft două cărţi vecine care să aibă în total 2006 foi? Dar 2005 foi?

12. Se dă şirul de numere naturale: 1, 1, 2, 5, 12, 27, 58, …
a) Completaţi şirul cu următorii trei termeni.
b) Calculaţi suma primilor 100 termeni ai şirului.

13. Calculaţi valoarea celui mai mic număr natural de forma $\overline{7a_1a_2a_3...a_k}$ care este de cinci ori mai mare decât numărul $\overline{a_1a_2a_3...a_k7}$, unde $k\geq 1$.

14. Calculaţi ultimele trei cifre ale numărului natural $n=\overline{123456789}_{(2001)}$, după ce acesta este scris în baza 10.

15. Rezolvaţi în N ecuaţia $3^x+3^y+3^z+3^t=6840$, unde $x,y,y,t\geq 2$.

16. Numărul natural *N*, format din trei cifre, este pătratul unui numărului natural *n*. Dacă schimbăm ordinea ultimelor două cifre ale lui *N*, obţinem pătratul numărului $n+1$. Calculaţi valoarea numărului *N*.

17. Fia *a* un număr natural compus astfel încât dacă numărul prim *p* divide numărul *a*, atunci numărul $p+1$ divide numărul *a*.
a) Demonstraţi că numărul 12 divide pe *a*.
b) Calculaţi valoarea celui mai mare număr *a* format din trei cifre.

18. Fie numerele naturale $\overline{xy}$ şi $\overline{ab}$, scrise în baza 10, astfel încât $\overline{xy}$ divide pe $\overline{ab}$. Demonstraţi că $x=y$ dacă şi numai dacă $a=b$.

19. Calculaţi valorile cifrelor *a* şi *b* ştiind că $a\cdot b=\overline{cd}$ şi $a^b=\overline{dc}$.

20. Se dau şase urne, unele conţinând bile. Fie operaţia: se aleg trei urne şi se pune câte o bilă în fiecare dintre ele.
a) Conţinutul iniţial al urnelor fiind 0, 0, 4, 6, 6 şi 8, scrieţi o succesiune de operaţii în urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.
b) Conţinutul iniţial al urnelor fiind 0, 1, 2, 3, 4 şi 4, demonstraţi că nu există o succesiune de operaţii în urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.

Bibliografie: Gazeta Matematică, Seria B

Cercul Judeţean de Excelenţă la Matematică Constanţa **Matei Dragoş, profesor**

Lecţia 9. Probleme pregătitoare pentru
Olimpiada de Matematică
Clasa a V-a
01.03. 2014

1) Populaţia oraşului VENI, este un număr natural format din cinci cifre. Dacă se adaugă cifra 1 în faţa acelui număr, se obţine populaţia oraşului VIDI, iar dacă se adaugă cifra 1 la sfârşitul acelui număr, se obţine populaţia oraşului VICI. Se ştie ca populaţia oraşului VICI, este de trei ori mai mare decât populaţia oraşului VIDI. Aflaţi populaţiile celor trei oraşe.

2) Demonstraţi că valoarea numărului: $\overline{2a011}+\overline{20b11}+\overline{201c1}+\overline{2011d}-\overline{abcd}$, nu depinde de valoarea cifrelor a, b, c şi d.

3) a) Demonstraţi că numărul 1+2+3+…. +2010+2011 este divizibil cu 2011.

b) Demonstraţi că orice mulţime formată din 2011 numere naturale, nenule, conţine cel puţin o submulţime cu suma elementelor sale divizibilă cu 2011.

4) Un număr natural de patru cifre nenule şi distincte două câte două , de forma $\overline{abcd}$ se numeşte " progresiv " dacă $a+d=b+c$. Să notăm cu P mulţimea tuturor numerelor progresive.

a) Demonstraţi că dacă $\overline{abcd} \in P$, atunci şi $\overline{dcba} \in P$, iar suma celor două numere este divizibilă cu 1111 .

b) Demonstraţi că numărul de elemente al mulţimii P, este divizibil cu 8 .

5) a) Determinaţi numărul natural $\overline{abcdef}$. Ştiind că $\overline{abcdef} = 3 \cdot \overline{bcdefa}$.

(E 12344 Gazeta Matematică 5-6/2002)

b) Suma a două numere naturale este 358. Împărţind numărul mai mare la numărul mai mic se obţine restul 8 şi împărţind numărul mai mic la numărul mai mare se obţine restul 50. Aflaţi numerele.

(E 13727 Gazeta Matematică 11/2008)

6) Într-o urnă sunt bile roşii, galbene şi albastre. 918 bile nu sunt roşii şi 418 bile nu sunt albastre. Împărţind numărul bilelor albastre la numărul bilelor galbene se obţine câtul 4 şi restul 53. Aflaţi câte bile roşii, galbene şi albastre sunt în urnă.

7) Demonstraţi că $\overline{abcde} \vdots 7 \Leftrightarrow \left(\overline{cde} - \overline{ab}\right) \vdots 7$ (criteriul de divizibilitate cu 7). Analog se formulează criteriile de divizibilitate cu 11 şi 13.

8) Demonstraţi că 5a + 8b se divide cu 17 dacă şi numai dacă 4a + 3b se divide cu 17, oricare ar fi numerele naturale a şi b.

9) Demonstraţi că 2a + 5b se divide cu 11 dacă şi numai dacă 3a + 2b se divide cu 11, oricare ar fi numerele naturale a şi b.

10) Calculaţi un multiplu al lui 2007 care are suma cifrelor tot 2007.

11) Daţi un exemplu de un număr care are suma cifrelor sale 1998, iar el însuşi se divide la 1998. Justificaţi răspunsul.

12) Demonstraţi că în produsul P = 1! . 2! . 3! . 4! ...... 100! se poate şterge unul dintre factorii k! astfel încât produsul care rămâne să fie pătrat perfect.

13) Fie numerele *a*, *b* şi *c* naturale astfel încât $a^2 + b^2 = c^2$. Demonstraţi că 6 / *ab*.

14) Determinaţi numerele pătrate perfecte de forma $\overline{aabb}$.

15) Determinaţi numerele pătrate perfecte de forma $\overline{abcd}$, astfel încât $\overline{abcd} = \left(\overline{abc} \cdot \overline{bd}\right)$.

16) Demonstraţi că dacă $\left(a^2 + b^2\right) \vdots 7$, atunci $a \vdots 7$ şi $b \vdots 7$.

17) Determinaţi numerele naturale *x*, *y*, *z*, unde *x* este număr prim, astfel încât: $x^7 + y^x \cdot z = 2137$.

18) Fie $a; b \in \mathbf{N}, a \neq 0$. Dacă fracţia $\dfrac{a+b}{5a+12b}$ este echivalentă cu $\dfrac{1}{6}$, calculaţi $\dfrac{b}{a}$.

E 12027, GM 10/2000

19) Calculaţi suma ultimelor 50 de cifre ale numărului *N* = 123 + 124 + ... + 321 + 123·124·...· 321.

20) Să se scrie numărul 189^n ca sumă de trei pătrate perfecte diferite, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

GM. 11/2010

21) a) Determinaţi numerele de forma $\overline{abcd}$, divizibile cu 21, care sunt pătrate perfecte.

b) Demonstraţi că $77777^3 < 22222^3 \cdot 8^2$.

G.M. 2/2009

22) Un număr $n \in \mathbf{N}^*$ se numeşte perfect dacă suma tuturor divizorilor lui naturali este egală cu 2*n*. a) Verificaţi că numerele 6, 28 şi 496 sunt perfecte.

(Pitagora)

b) Demonstraţi că dacă $p \in \mathbf{N}^*$ este număr prim astfel încât $2^p - 1$ este număr prim, atunci $n = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$ este un număr perfect. ***(Elementele lui Euclid)***

23) Determinaţi valorile cifrelor a şi b astfel încât: $\overline{aaa}^3 \cdot b^2 = \overline{bbb}^3$.

D.M. Bătineţu - Giurgiu

24) Determinaţi ultimele două cifre ale numărului:
$a = 3^{29} - 3^{28} + 3^{27} - \cdots + 3^3 - 3^2 + 3^1 - 3^0$.

Daniela Chendra

25) Se dă mulţimea $A = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Determinaţi $A \cap \mathbb{N}$.

Nicolae Cavachi

26) Demonstraţi că în baza zece egalitatea
$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} + \overline{a_2 a_3 \ldots a_n a_1} + \cdots + \overline{a_n a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} = k^2, a_i$ cifre, $k \in \mathbb{N}$, are numai patru soluţii distincte.

Constantin Iordan

27) Determinați numărul natural cuprins între 2000 și 3000 divizibil cu orice număr natural cuprins între 1 și 10.

28) Fie mulţimile $A = \{x | x = 3a + 2, a \in \mathbf{N}\}$ şi $B = \{x | x = 2b + 3, b \in \mathbf{N}\}$. Determinaţi $A \cap B$.

29) Considerăm şirul: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, ...

a) Demonstraţi că 2010 nu este termen al şirului.

b) Determinaţi termenul de pe locul 2010.

c) Calculaţi suma primilor 2010 termeni ai şirului.

Gazeta Matematică

30) Fie mulţimile: $A = \left\{\overline{ab} \,\middle|\, \frac{\overline{ab}}{8} = \frac{\overline{ba}}{14}\right\}, B = \{x \in N \mid 35 < x < 50, x\ are\ 9\ divizori\}$,

$C = \left\{x \in N \,\middle|\, x = \frac{\overline{4a5}}{15}\right\}$.

a) Determinaţi mulţimile *A* şi *B*.

b) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

p_1: „Suma elementelor mulţimii C este un număr divizibil cu 15”.

p_2: „$A \cap B = \{36, 48\}$”

TEMĂ: 5, 7, 9, 11, 12, 20, 28.