Cercul Judeţean de Excelenţă la Matematică **Prof. Mihai Preda**
Constanţa

Lecţia 7. Fracţii ordinare
Clasa a V-a
25.01.2014

O fracţie ordinară este câtul neefectuat a două numere naturale *a* şi *b*, cu $b \neq 0$. Fracţia ordinară se notează $\frac{a}{b}$ sau *a*/*b*. Numărul *a* din fracţia ordinară $\frac{a}{b}$ se numeşte **numărătorul** fracţiei şi numărul *b* se numeşte **numitorul** fracţiei.

1. Fracţia ordinară $\frac{a}{b}$ este **subunitară** dacă $a < b$.
2. Fracţia ordinară $\frac{a}{b}$ este **echiunitară** dacă $a = b$.
3. Fracţia ordinară $\frac{a}{b}$ este **supraunitară** dacă $a > b$.

Fracţiile ordinare $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sunt echivalente dacă $ad = bc$.

Aplicatii:

1. Simplificaţi fracţiile astfel încât să obţineţi fracţii ireductibile:

a) $\frac{\overline{aa}}{\overline{aaa}}$ b) $\frac{3^{n+2}+3^n}{2^{n+3}+2^{n+1}}$ c) $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}$

d) $\frac{2+4+6+....+524}{3+6+9+.....+786}$ **e)** $\frac{1+2+3+......121}{3+6+9+...+171}$

e) $\frac{1111+2222+3333+4444+5555+6666}{7777+8888+9999}$

2. Calculaţi valorile cifrelor *x*, *y* şi *a* astfel încât fracţiile să poată fi simplificate:

a) $\frac{\overline{2x}}{\overline{xy}}$ prin 5; **b)** $\frac{\overline{3a}}{\overline{4a}}$ prin 10; **c)** $\frac{\overline{x4}}{\overline{9x}}$ prin 2.

3 (T). Simplificaţi fracţiile : **a)** $\frac{1+2+\cdots+15}{2+4+\cdots+30}$; **b)** $\frac{1+3+5+\cdots+101}{51}$.

4. Calculaţi valorile numărului $n \in \mathbf{N}$ astfel încât fracţiile să fie numere naturale:

a) $\frac{13}{n-2}$; **b)** $\frac{9}{2n-1}$; c) $\frac{2n+5}{n+1}$.

5. (T) Se consideră mulţimea $A=\left\{x \in N / x = \frac{\overline{2618abcabc4675}}{187}, a \neq 0\right\}$.

a) Calculaţi cardinalul mulţimii A.

b) Calculaţi suma tuturor numerelor de forma $\overline{abc}$ pentru care $\frac{\overline{2618abcabc4675}}{187} \in N$, $a \neq 0$.

6. Codul PIN al unui telefon mobil este un număr natural format din patru cifre, dintre care trei sunt identice, fără a fi toate patru identice.

a) Câte astfel de coduri există?

b) Care este suma S a tuturor acestor coduri?

c) Demonstraţi că S este un număr natural divizibil cu 1890.

d) Calculaţi numărul tripletelor de forma (x, y, z), unde $x, y, z \in \mathbf{N}$ şi $x < y < z$, care verifică relaţia: $x \cdot y \cdot z = \dfrac{S}{160^2 - 6^2 + 2^2 + 2005^0}$.

7. Fie o fracţie echiunitară de forma $\dfrac{\overline{xy}}{82}$. Calculaţi valoarea sumei x^2+y^3.

8. Ştiind că fracţia $\dfrac{3x-1}{116}$ este echiunitară, calculaţi valoarea numărului natural x şi apoi calculaţi valoarea fracţiei $\dfrac{2x+5}{4x-91}$.

9. Calculaţi valorile numerelor prime a şi b astfel încât fracţia $\dfrac{17a+4b}{110}$ să fie echiunitară.

10. Ordonaţi crescător fracţiile: $\dfrac{321321321}{123123123}; \dfrac{123456789}{123456789}; \dfrac{12345678}{123456789}$.

11. a) Câte numere naturale sunt în şirul: $\dfrac{1\cdot 15}{40}$; $\dfrac{2\cdot 15}{40}$; $\dfrac{3\cdot 15}{40}$; ...; $\dfrac{100\cdot 15}{40}$?

b) Simplificaţi fracţia: $\dfrac{2\cdot 3+4\cdot 6+6\cdot 9+...+2010\cdot 3015}{3\cdot 5+6\cdot 10+9\cdot 15+...+3015\cdot 5025}$.

(O. J. M.)

12. (T) **a)** Demonstraţi că numărul x = 2+4+6+...+4020-2010 este pătrat perfect.

b) Dacă a şi b sunt cifre, cu $a \neq 0$, demonstraţi că numărul $\dfrac{\overline{a1b}+\overline{a2b}+...+\overline{a9b}}{\overline{a5b}}$ este pătrat perfect.

(O. J. M.)

13. Simplificati fractiile: $\dfrac{2^3\cdot 5^{30}}{5^{31}\cdot 2^2}; \dfrac{3a+6b}{9a+18b}; \dfrac{2^{101}+2^{102}+2^{103}}{2^{98}+2^{99}+2^{100}}$.

14. a) Simplificaţi fracţia $\dfrac{\overline{2x2x2x}}{\overline{3x3x3x}}$ şi calculaţi valoarea numărului natural x pentru care fracţia este ireductibilă.

b) Se consideră şirul de fracţii: $\dfrac{5}{7}, \dfrac{8}{11}, \dfrac{11}{15}, \dfrac{14}{19}, \dfrac{17}{23}, \ldots$. Determinaţi următorul termen al şirului şi termenul de pe poziţia 51.

15. (T) Fie mulţimea $A=\left\{x \in N / x = \dfrac{\overline{2618abcabc4675}}{187}, a \neq 0\right\}$.

a) Calculaţi cardinalul mulţimii A.

b) Calculaţi suma tuturor numerelor de forma $\overline{abc}$ pentru care $\frac{\overline{2618abcabc4675}}{187}\in\mathbf{N}$.

(O. J. M.)

16. Fie fracţia $\frac{3n+5}{2n+x}$.

a) Pentru $x = 3$ demonstraţi că fracţia este ireductibilă oricare ar fi n număr natural.

b) Pentru $x = 7$, calculaţi valorile naturale ale lui n pentru care fracţia este reductibilă.

ŞTERGE! $AB^2 =$ $2\cdot a$ $\overline{ab}$ $\frac{AB}{CD}=\frac{a}{b}$ $-=$ $-=-$

17. Demonstraţi că fracţia $\frac{a^2b+ab^2}{c^2d+cd^2}$ este reductibilă pentru orice valori ale numerelor naturale nenule a, b, c şi d. Generalizaţi!

18. Demonstraţi că fracţia $\frac{3^a+5^b+7^c+2d}{ab(a+b)}$, unde $a, b\in\mathbf{N^*}$, $c, d\in\mathbf{N}$, nu poate fi simplificată printr-un număr natural par.

19. Demonstraţi că fracţia $\frac{2005^a+2007^b+1}{ab(a+b)}$, unde $a, b\in\mathbf{N^*}$, nu poate fi simplificată printr-un număr natural par.

20. Demonstraţi că fracţia $\frac{a^2b+ab^2+7^n}{c^2d+cd^2+6^m}$, unde a, b, c, d, $n\in\mathbf{N}$, $m\in\mathbf{N^*}$, nu poate fi simplificată printr-un număr natural par.

21. Demonstraţi că fracţia $\frac{5^a+7^b+1}{ab(a+b)}$, unde $a, b\in\mathbf{N^*}$, nu poate fi simplificată printr-un număr natural par.

22. (T) Calculaţi valorile numerelor naturale x şi y astfel încât fracţia $\frac{xy-x+2y-2}{3}$ să fie subunitară.

23. Calculaţi suma tuturor numerelor de forma $\overline{ab}$, unde $\frac{a+1}{b}\in\mathbf{N}$ şi $\frac{b+2}{a}\in\mathbf{N}$.

24. Stabiliţi dacă fracţiile sunt subunitare sau supraunitare:

a) $\frac{1993^{1994}+1994^{1993}}{1993^{1993}+1994^{1994}}$; **b)** $\frac{n^{n+1}+(n+1)^n}{n^{n+1}+(n+1)^{n+1}}$.

25. Demonstraţi că numărul $n=\frac{21^{1998}+225^{994}-81^{497}}{29\cdot1998+2^{2^2}-29\cdot1987}$ este număr natural.

26. Calculaţi valorile numerelor naturale *x* şi *y* astfel încât fracţia $\frac{35}{x(y-2)+y-2}$ să fie număr natural.

27. Determinaţi tripletele (*x*, *y*, *z*) de numere naturale pentru care fracţia $\frac{5}{x+2y+3z}$ este supraunitară.

28. Fie numărul $f(n) = \frac{2n+289}{2n+3}$ (scrierea ”*f*(*n*)” o citiţi “*f* de *n*”). Calculaţi valorile numărului $n \in \mathbf{N}$ astfel încât numărul $f(n) \in \mathbf{N}$.

29. Calculaţi valorile numărului natural *n* pentru care fracţia $\frac{2^n+3^n}{2^{n-2}+3^{n-2}}$ este număr natural.

30. Calculaţi valorile numărului natural *n* pentru care fracţia $\frac{6^n+7^n+8^n}{3^n+4^n+5^n}$ este număr natural.

31. Calculaţi valorile numărului natural *x* dacă fracţia $\frac{2^{1+2^x}+2^{2^x}+2^{257}}{2^{258}+2^{256}}$ este subunitară.

32. Simplificaţi fracţia $\frac{1326091}{1734119}$.

33. Calculaţi valoarea celui mai mic număr natural nenul *n* şi valorile numerelor naturale *a*, *b* şi *c* pentru care fracţia $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}{2^a\cdot 3^b\cdot 11^c\cdot 23}$ este număr natural.

34. Determinaţi forma numerelor naturale *n* pentru care fracţia $\frac{4n+5}{2n+1}$ este reductibilă.

35. (T) Demonstraţi că fracţia $\frac{9^{16}-7^{16}}{23^{19}-19^{26}}$ poate fi simplificată prin 10.

36. (T) Determinaţi numărul natural $\overline{abcd}$ cu proprietatea că fracţia $\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}+\overline{cd}}$ are cea mai mică valoare posibilă.

37. Cercetaţi dacă fracţia este ireductibilă, iar dacă este reductibilă calculaţi valoarea numărului cu care o puteţi simplifica.

a) $\frac{15n+7}{10n+5}$; **b)** $\frac{7n+4}{9n+5}$; **c)** $\frac{15n+4}{35n+9}$.

38. Simplificaţi fracţia $\frac{199....9}{99...95}$ ştiind că cifra 9 apare de *n* ori atât la numărător cât şi la numitor.

39. Calculaţi valorile numărului natural *n* ştiind că $1 \le \frac{5n-2}{2n+1} < 2$.

40. Demonstraţi că pentru orice valoare a numărului natural *n* fracţia $\frac{23^n+23^{n+1}+23^{n+2}+23^{n+3}}{37^n+37^{n+1}+37^{n+2}+37^{n+3}}$ poate fi simplificată cu 20.

41. Calculaţi numerele de forma $\overline{abcd}$ ştiind că $a > b > c > d$ şi că fracţia $\frac{\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{bd}+\overline{cd}}{\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{db}+3a}$ este subunitară.

<u>Temă: problemele 3, 5, 12, 15, 22, 35 şi 36.</u>

Lecţia 7. Fracţii ordinare
Clasa a V-a
25.01.2014
Evaluare

Nr. crt.	Numele şi prenumele elevului	P3	P5	P12	P22	P26	P35	P36	Total
1.	**Ancuţa Daria** Ş.G.”Spectrum”	**7**	**5**	**4**	**6**	**7**	**7**	**6**	**42**
2.	**Balagiu Darian** C.N.P.”C-tin Brătescu”	**7**	**3**	**7**	**7**	**7**	**7**	**5**	**43**
3.	**Beghim Genghiz** L.T.”Ovidius”	**7**	**5**	**7**	**7**	**7**	**7**	**2**	**42**
4.	**Bogaciov Vlad** L.T.”Ovidius”	-	-	-	-	-	-	-	-
5.	**Boghea Ioana** S.G. Nr. 37	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**49**
6.	**Boni Daniel** S.G.”Dan Barbilian”	-	-	-	-	-	-	-	-
7.	**Brânzoi Ana-Emilia** L.T.”Ovidius”	**5**	**5**	**7**	**6**	**7**	**7**	**6**	**43**
8.	**Carp Alexandru** C.N.M.B.	**7**	**5**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**47**
9.	**Cocargeanu Vanda** L.T.”Ovidius”	**5**	**5**	**7**	**7**	**7**	-	-	**31**
10.	**Constantin Răzvan** S.G.”Gheorghe Ţiţeica”	-	-	-	-	-	-	-	-
11.	**Dulgheru Andrei** C.N.M.B.	-	-	-	-	-	-	-	-
12.	**Gîrban Alexandru** Ş.G.”Spectrum”	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**49**
13.	**Ionescu Şerban** C.N.M.B.	**7**	**5**	**7**	**7**	**7**	**7**	**6**	**46**
14.	**Nuţescu Sebastian** L.T.”Ovidius”	**5**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**47**
15.	**Pîrvu Alexandru** L.T.”Ovidius”	-	-	-	-	-	-	-	-
16.	**Preda Diana** L.T.”Ovidius”	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**49**
17.	**Puşcaşu Răzvan-Ştefan** Ş.G.”Spectrum”	**7**	**3**	**7**	**6**	**7**	**7**	**3**	**40**
18.	**Rusu Sergiu-Ioan** S.G.”Nicolae Tonitza”	-	-	-	-	-	-	-	-
19.	**Simionov Bogdan** C.N.M.B.	**7**	**7**	**7**	**5**	**7**	**7**	**1**	**41**
20.	**Stelea Karina-Sânziana** C.N.M.B.	**6**	**5**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**46**

21.	**Şendroiu Răzvan-Călin** L.T.”Ovidius”	**7**	**-**	**4**	**2**	**7**	**7**	**2**	**29**

3. Simplificați fracțiile :**a)** $\frac{1+2+3+...+15}{2+4+6+...+30}$; b) $\frac{1+3+5+...+101}{51}$.

Soluţie:**a)** 8/31; **b)** 101.

5. Fie mulţimea A=$\left\{x \in N / x = \frac{\overline{2618abcabc4675}}{187},\ a \neq 0\right\}$.

a) Calculaţi cardinalul mulţimii A.

b) Calculaţi suma tuturor numerelor de forma $\overline{abc}$ pentrucare $\frac{\overline{2618abcabc4675}}{187} \in$**N**,

undea≠0.

Soluţie: **a)** $\frac{\overline{2618abcabc4675}}{187} \in N \Rightarrow \frac{2618 \cdot 10^{10}}{187} + \frac{\overline{abc} \cdot 1001 \cdot 10^4}{187} + \frac{4675}{187} \in$**N**⇒

$\Rightarrow 14 \cdot 10^{10} + 25 + \frac{\overline{abc} \cdot 91 \cdot 10^4}{17} \in$**N**⇒ $\frac{\overline{abc} \cdot 91 \cdot 10^4}{17} \in$**N**⇒ $17 / \overline{abc}$. Cum *a*≠ 0, cel mai mic număr de trei cifre care este divizibil cu 17 este 102 = 17 · 6, iar cel mai mare este 986 = 17 · 58.
În total sunt 58 – 5 = 53 de numere de trei cifre care se divid cu 17, deci card A = 53.

b) Suma cerută este S = 102 + 119 + …+ 986 = 17(6+7+ … + 58) = $17 \cdot \frac{(6+58) \cdot 53}{2} = 17 \cdot 32 \cdot 53$ = = 28.832.

12.a) Demonstraţi că numărul *x* = 2+4+6+...+4020-2010 este pătrat perfect.

b) Dacă *a* şi *b* sunt cifre, unde*a* ≠ 0, demonstraţi că numărul $\frac{\overline{a1b} + \overline{a2b} + ... + \overline{a9b}}{\overline{a5b}}$ este pătrat perfect.

(O. J. M. 2010, Giurgiu)

Soluţie:

a)*x*=2(1+2+3+...+2010) -2010= 2010·2011-2010=2010·(2011-1)= 2010^2.

b) (100a+10+b+100a+20+b+….+100a+90+b)/(100a+50+b)=(900a+450+9b)/(100a+50+b)=9=3^2.

22. Calculaţi valorile numerelor naturale *x* şi *y* astfel încât fracţia $\frac{xy - x + 2y - 2}{3}$ să fie subunitară.

Soluţie: Prelucrăm numărătorul fracţiei: $xy - x + 2y - 2 = x(y-1) + 2(y-1) =$
$= (x+2)(y-1)$; $(x+2)(y-1) < 3 \Rightarrow (x+2)(y-1) \in \{0,\ 1,\ 2\}$ şi analizăm următoarele situaţii:

1^0. $(x+2)(y-1) = 0 \Rightarrow$ *y* = 1 şi *x* ∈**N**;

2^0. $(x+2)(y-1)$ =1 nu are soluţii în **N**;

3^0. $(x+2)(y-1)$,= 2 ⇒*x* = 0 şi*y* = 2, deci problema are două soluţii.

26. Calculaţi valorile numerelor naturale x şi y astfel încât fracţia $\frac{35}{x(y-2)+y-2}$ să fie număr natural.

Soluţie: $\frac{35}{x(y-2)+1\cdot(y-2)}=\frac{35}{(y-2)(x+1)}\in \mathbf{N}\Rightarrow(x+1)(y-2)\in D_{35}=\{1,5,7,35\}\Rightarrow$

$\Rightarrow(x,y)\in\{(0,3);(0,7);(4,3);(0,9);(6,3);(0,37);(34,3)\}$.

35. Demonstraţi că fracţia $\frac{9^{16}-7^{16}}{23^{16}-19^{26}}$ poate fi simplificată prin 10.

Soluţie: $u(9^{16}\text{-}7^{16})=0\Rightarrow(9^{16}\text{-}7^{16}) \vdots 10$, şi $u(23^{16}-19^{26})=0\Rightarrow(23^{16}-19^{26}) \vdots 10$, deci fracţia poate fi simplificată cu 10.

Notă: enunţul original conţine o eroare; fiecare rezolvitor va primi 7 puncte.

36. Determinaţi numărul natural $\overline{abcd}$ cu proprietatea că valoarea fracţiei $\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}+\overline{cd}}$ este minimă.

Soluţie: $\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}+\overline{cd}}=\frac{\overline{ab00}+\overline{cd}}{\overline{ab}+\overline{cd}}=\frac{99\cdot\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}}+\frac{\overline{ab}+\overline{cd}}{\overline{ab}+\overline{cd}}=\frac{99\cdot\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}}+1;$

$\frac{99\cdot\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}}=\min\Rightarrow\frac{\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}}=\min\Rightarrow\overline{ab}=\min$ şi $\overline{cd}=\max\Rightarrow\overline{ab}=10$ şi $\overline{cd}=99\Rightarrow$
$\overline{abcd}=1099$.