Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2015

Probă scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$. Calculați suma primilor șapte termeni ai progresiei.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^2-8x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale pozitive ecuația $\lg^2 x + 5\lg x - 6 = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor 8.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{v_1} = 2\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v_2} = a\vec{i} + 6\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5$, $BC = 7$ și $AC = 8$. Calculați măsura unghiului A.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră mulțimea de funcții $G = \left\{ f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \,\middle|\, f_{a,b}(x) = ax+b,\ a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R} \right\}$.

5p **a)** Arătați că $f_{a,b}\circ f_{c,d} = f_{ac,\, ad+b}$, unde „$\circ$” este compunerea funcțiilor, iar $a,c\in\mathbb{R}^*$, $b,d\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $f_{-1,2}\circ f_{-1,2}$, „$\circ$” fiind compunerea funcțiilor.

5p **c)** Demonstrați că $f_{1,0}\circ f_{a,b} = f_{a,b}\circ f_{1,0} = f_{a,b}$, pentru orice $f_{a,b}\in G$, „$\circ$” fiind compunerea funcțiilor.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

5p a) Verificați că legea „$*$" este asociativă.

5p b) Găsiți două numere iraționale α și β pentru care $\alpha * \beta$ este număr rațional.

5p c) Aflați numărul real a astfel încât $\underbrace{a*a*......*a}_{\text{de 8 ori}} = 4030$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1+x}{x^2+1}$.

5p a) Calculați $\int (x^2+1)f(x)dx$.

5p b) Calculați $\int\left[\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{2}{x+1}\right]dx$.

5p c) Arătați că $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$ este o primitivă a funcției f.

2. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(x^2+4\right)$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln\left(x^2+4\right)+4\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}-2x+3$.

5p a) Calculați $\int e^{f(x)}dx$.

5p b) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p c) Determinați primitiva $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $H(0)=1$.

Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2015
Probă scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases} 2r=4 \\ 4a_1+11r=30 \end{cases} \Rightarrow a_1=2, r=2$	**3p**
	$S_7=56$	**2p**
2.	$\Delta=48$	**1p**
	$x_V=-\dfrac{b}{2a}=1$	**2p**
	$y_V=-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{48}{16}=-3$	**2p**
3.	$\lg x=t, t^2+5t-6=0 \Rightarrow t_1=-6, t_2=1$	**3p**
	$x=10^{-6}, \quad x=10$	**2p**
4.	$P=\dfrac{\text{nr. cazurilor favorabile}}{\text{nr. cazurilor posibile}}$	**2p**
	Numărul cazurilor posibile este 90.	**1p**
	Numărul cazurilor favorabile este 8.	**1p**
	$P=\dfrac{4}{45}$	**1p**
5.	$\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{6}$	**3p**
	$a=12$	**2p**

6.	$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$	**2p**
	$\cos A=\dfrac{1}{2}$	**2p**
	Măsura unghiului A este de $60°$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\left(f_{a,b}\circ f_{c,d}\right)(x)=f_{a,b}\left(f_{c,d}(x)\right)=a(cx+d)+b=$	**3p**
	$=acx+ad+b=f_{ac,\,ad+b}(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	**2p**
b)	$\left(f_{-1,2}\circ f_{-1,2}\right)(x)=f_{1,-2+2}(x)=$	**3p**
	$=f_{1,0}(x)=x,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	**2p**
c)	$f_{a,b}\circ f_{1,0}=f_{a\cdot 1,\,a\cdot 0+b}=f_{a,b}$	**2p**
	$f_{1,0}\circ f_{a,b}=f_{1\cdot a,1\cdot b+0}=f_{a,b}$	**2p**
	Finalizare	**1p**
2.a)	$(x*y)*z=\sqrt[3]{x^3+y^3}*z=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$	**2p**
	$x*(y*z)=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	Exemplu: $\alpha=\sqrt[3]{5}$, $\beta=\sqrt[3]{3}$	**3p**
	$\alpha*\beta=\sqrt[3]{5+3}=2\in\mathbb{Q}$	**2p**
c)	$\underbrace{a*a*......*a}_{\text{de 8 ori}}=\sqrt[3]{\underbrace{a^3+a^3+......+a^3}_{\text{de 8 ori}}}=\sqrt[3]{8a^3}=2a$	**4p**
	$2a=4030\Rightarrow a=2015$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\int(x^2+1)f(x)dx=\int(x+1)dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^2}{2}+x+C$	**3p**
b)	$\int\dfrac{1}{f(x)}dx=\int\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-\dfrac{2}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^2}{2}-x+C$	**3p**

c)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitivă a funcției $f \Leftrightarrow F$ derivabilă și $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(-1,\infty)$	**2p**
	$F'(x)=\left(\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)'=f(x)$ pentru orice $x\in(-1,\infty)$	**3p**
2.a)	$\int e^{f(x)}dx=\int\left(x^2+4\right)dx=$	**2p**
	$=\frac{x^3}{3}+4x+\mathcal{C}$	**3p**
b)	F este primitiva lui $f \Leftrightarrow F$ este derivabilă și $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)=\ln\left(x^2+4\right)+x\cdot\frac{2x}{x^2+4}+4\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}-2=$	**2p**
	$=\ln\left(x^2+4\right)+0=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
c)	$H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow H(x)=F(x)+c$, unde c este o constantă	**1p**
	$H(0)=F(0)+c\Rightarrow 1=3+c$	**2p**
	$H(x)=x\ln\left(x^2+4\right)+4arctg\frac{x}{2}-2x+1$	**2p**