



Șimleu Silvaniei, 13 Decembrie, 2014

**Concursul Interjudețean de Matematică "Teodor Topan"**  
**Ediția a IX-a**

**CLASA A XI-A - Barem orientativ de corectare**

**Problema 1** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  o funcție descrescătoare și  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale cu  $a_0 > 0$  și  $a_{n+1} = a_n + f(a_n) \forall n \in \mathbb{N}$ . Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , însă  $(\frac{a_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent.

**Soluție.** Din ipoteză avem că  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , deci șirul este strict crescător.

... 1 punct

Dacă prin absurd  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$  atunci am avea că șirul este monoton și mărginit, deci convergent.

... 1 punct

Notând prin  $l$  limita sa și trecând la limită în relația de recurență am obține  $l = l + f(l) \Rightarrow f(l) = 0$ , care contrazice faptul că  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Așadar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

... 2 puncte

Deoarece  $n$  este strict crescător și  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ , putem aplica lema Stolz-Cesaro și avem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} - a_n)}{n + 1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n).$$

... 2 puncte

Deoarece  $f$  este descrescătoare și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , avem că  $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir descrescător și mărginit, deci convergent.

... 1 punct

**Problema 2** Fie  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  cu  $\det(A) \neq 0$ . Arătați că dacă există  $S$  o mulțime finită de numere complexe astfel încât  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $A^m$  are toate elementele în  $S$ , atunci există un număr natural  $k$  pentru care  $A^k = I_n$ .

**Soluție.** Dacă notăm prin  $|S|$  cardinalul mulțimii  $S$ , atunci conform ipotezei, fiecare element al matricii poate lua cel mult  $|S|$  valori diferite. Așadar există  $|S|^{n^2}$  matrice cu proprietatea din enunț.

... 4 puncte

Prin urmare în șirul  $A, A^2, A^3, \dots$ , există doi termeni egali, să zicem  $A^r = A^s$ , cu  $r > s$ . Cum  $\det(A) \neq 0$ , avem că  $A$  este inversabilă și deci  $A^{r-s} = I_n$ . Notând  $r - s = k$ , obținem cerința problemei.

... 3 puncte

**Problema 3** Fie  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  două matrici care comută și au proprietatea că  $A^r = B^s = I_n$ , unde  $r, s$  sunt numere naturale impare. Demonstrați că  $A + B$  este inversabilă.

**Soluție.**  $2I_n = A^{rs} + B^{rs} = (A + B)(A^{rs-1} - A^{rs-2}B + \dots - AB^{rs-2} + B^{rs-1})$ .

**Problema 4** a) Fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale cu proprietatea că oricare ar fi  $k \in \mathbb{N}$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0$ . Implică această proprietate faptul că  $(a_n)_{n \geq 0}$  este convergent? Justificați răspunsul.

b) Fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale cu proprietatea că oricare ar fi funcția  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+f(n)} - a_n) = 0$ . Implică această proprietate faptul că  $(a_n)_{n \geq 0}$  este convergent? Justificați răspunsul.

**Soluție.** a) Nu. Putem să alegem  $a_n = \sqrt{n}$ . Atunci, pentru orice  $k$  avem:  $a_{n+k} - a_n = \frac{k}{\sqrt{n} + \sqrt{n+k}}$ , care tinde la 0 când  $n$  tinde la infinit.

... 1 punct

b) Este cunoscut că un șir  $(a_n)$  este convergent dacă și numai dacă pentru orice  $\epsilon > 0$  există  $N \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|a_m - a_n| < \epsilon, \forall m, n \geq N$  (adică  $(a_n)$  este un șir Cauchy)

... 1 punct

Să presupunem prin reducere la absurd că șirul  $(a_n)$  din ipoteză nu este convergent. Atunci exista  $\epsilon > 0$  astfel încât pentru orice  $N \in \mathbb{N}$  există  $m = m(N), n = n(N) \geq N$  astfel încât  $|a_m - a_n| \geq \epsilon$ .

... 1 punct

Atunci, pentru  $N = 1$ , exista  $m_1, n_1$  astfel încât  $m_1, n_1 \geq 1$  și  $|a_{m_1} - a_{n_1}| \geq \epsilon$ . Mai departe, pentru  $N = n_1 + m_1$ , exista  $m_2, n_2 \geq m_1 + n_1$  astfel încât  $|a_{m_2} - a_{n_2}| \geq \epsilon$ .

Continuând în felul acesta, obținem șiruri  $(m_k)$  și  $(n_k)$  astfel încât pentru orice  $k$ ,  $m_k > m_{k-1}$  și  $n_k > n_{k-1}$  și  $|a_{m_k} - a_{n_k}| \geq \epsilon$ .

... 2 puncte

Putem presupune fără a restrânge generalitatea problemei că  $m_k \geq n_k$   
Definim

$$f(n) = \begin{cases} m_k - n_k & \text{dacă } n = n_k \\ 1 & \text{altfel} \end{cases}$$

Atunci  $|a_{n_k+f(n_k)} - a_{n_k}| = |a_{m_k} - a_{n_k}| \geq \epsilon$ , deci  $a_{n_k+f(n_k)} - a_{n_k}$  nu tinde la 0.

... 2 punct