TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a M1_*matmatică-informatică*
10.12.2014

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia $\hat{2}x = \hat{4}$.

5p **2.**Pe mulţimea $M = (0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră legea de compoziţie $*: M\times M \to M$, $x*y = x^{3\cdot\ln y}$, $\forall x,y\in M$. Calculaţi $3*e$.

5p **3.**Se consideră mulţimea $G=(-1,1)$ şi legea de compoziţie $*: G\times G\to G, x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall x,y\in G$. Determinaţi elementul neutru al legii $*$.

5p **4.**Calculaţi $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}dx$.

5p **5.**Calculaţi $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

5p **6.**Arătaţi că funcţia $\mathrm{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \mathrm{F}(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră legea de compoziţie $*: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x*y = xy-3x-3y+12, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Demonstraţi că legea este asociativă.

5p **b)** Arătaţi că $x*3=3*x=3, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Calculaţi $(-2014)*(-2013)*\ldots*(2013)*(2014)$.

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\left\{X(a)\in M_2(\mathbb{R})\,\middle|\, X(a)=I_2+a\cdot A, a>-\dfrac{1}{2}\right\}$.

5p **a)** Arătaţi că: $I_2\in G$ şi $O_2\notin G$.

5p **b)** Demonstraţi că mulţimea G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport înmulţirea matricelor.

5p **c)** Ştiind că $(G,\cdot)$ este grup, arătaţi că funcţia $f:G\to\mathbb{R}, f(X(a))=\ln(2a+1)$ este un izomorfism de la $(G,\cdot)$ la grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R},+)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2e^x} & ,x\le 0\\ x\cdot\sin x+\dfrac{1}{2} & ,x>0\end{cases}$.

5p **a)** Arătaţi că funcţia f admite primitive.

5p **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **c)** Determinaţi primitiva funcţiei f care se anulează în $x=0$.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+3} dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a M1_*matmatică-informatică*
10.12.2014
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.
• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I

1.	$\begin{array}{c\|cccccc} x & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} & \hat{5} \\ \hline \hat{2}x & \hat{0} & \hat{2} & \hat{4} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{4} \end{array}$ $x \in \{\hat{2}, \hat{4}\}$	**3p** **2p**
2.	$3 * e = 3^{3 \cdot \ln e} =$ $3^{3 \cdot 1} = 3^3 = 27$	**2p** **3p**
3.	$\exists e \in G$ a.î. $x * e = e * x = x, \forall x \in G$ $x * e = \frac{x+e}{1+xe} = \frac{e+x}{1+ex} = e * x, \forall x \in G$ $x * e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \Leftrightarrow \cancel{x} + e = \cancel{x} + x^2 e \Rightarrow e(1-x^2) = 0, \forall x \in G$ $\Rightarrow e = 0 \in (-1,1) = G$ element neutru.	**1p** **1p** **2p** **1p**
4.	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 t\, dt = \left.\frac{t^2}{2}\right\|_0^1$ $= \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$	**3p** **2p**
5.	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \left.\arcsin \frac{x}{2}\right\|_0^1 =$ $= \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$	**3p** **2p**
6.	f continuă pe $\mathbb{R}$ (compunere de funcţii continue) $\Rightarrow f$ admite primitive Mulţimea primitivelor lui f este : $\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$ $2 \in C \Rightarrow F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2$ este o primitivă a lui f	**1p** **3p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea

1.	**a)**	$(x * y) * z = (x-3)(y-3)(z-3) + 3, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $x * (y * z) = (x-3)(y-3)(z-3) + 3, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z) \forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow$ "$*$"asociativa	**2p** **2p** **1p**
	b)	$x * 3 = 3x - 3x - 9 + 12 = 3$ $3 * x = 3x - 9 - 3x + 12 = 3$ $x * 3 = 3 * x = 3, \forall x \in \mathbb{R}$	**2p** **2p** **1p**

	c)	$(-2014)*(-2013)*\ldots*(2013)*(2014)\overset{asoc}{=}\underbrace{[(-2014)*(-2013)*\ldots*2]}_{x}*3*\underbrace{[4*\ldots*2014]}_{y}=$ $=x*3*y\overset{asoc}{=}(x*3)*y\overset{b)}{=}3*y\overset{b)}{=}3$	**3p** **2p**
2.	**a)**	Pt. $a=0>-\frac{1}{2}\Rightarrow X(0)=I_2+0\cdot A=I_2\Rightarrow I_2\in G$ Pp. $O_2\in G\Rightarrow \exists a>-\frac{1}{2}$ a.î $X(a)=O_2\Rightarrow I_2=-aA\Rightarrow \begin{cases}a=-1\\a=0\end{cases}$ imposibil, deci $O_2\notin G$	**2p** **3p**
	b)	G parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport înmulţirea matricelor $\Leftrightarrow \forall X(a),X(b)\in G\Rightarrow X(a)\cdot X(b)\in G$ $A^2=2A$ $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+bA+aA+abA^2=$ $=I_2+bA+aA+2abA=I_2+(2ab+a+b)A=X(2ab+a+b)$ (1) $a>-\frac{1}{2},b>-\frac{1}{2}\Rightarrow\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)>0\Rightarrow ab+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b>0\Rightarrow 2ab+a+b>0$ (2) Din (1) şi (2) $\Rightarrow X(a)\cdot X(b)\in G$	**1p** **1p** **2p** **1p**
	c)	f izom. $\Leftrightarrow$ 1) f bijectivă şi 2) $f(X(a)\cdot X(b))=f(X(a))+f(X(b)),\forall X(a),X(b)\in G$ f injectivă $\Leftrightarrow \forall X(a),X(b)\in G, f(X(a))=f(X(b))\Rightarrow X(a)=X(b)$ $f(X(a))=f(X(b))=\ln(2a+1)=\ln(2b+1)\overset{\ln inj}{\Rightarrow}2a+1=2b+1\Rightarrow a=b\Rightarrow X(a)=X(b)\Rightarrow$ f injectivă. (1) f surjectivă $\Leftrightarrow \forall y\in\mathbb{R},\exists X(a)\in G$ a.î. $f(X(a))=y\Leftrightarrow \ln(2a+1)=y\Rightarrow a=\frac{e^y-1}{2}>-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \exists X(a)=X\left(\frac{e^y-1}{2}\right)\in G, f(X(a))=y\Rightarrow f$ surjectivă (2), din (1),(2) f bijectivă $f(X(a)\cdot X(b))\overset{a)}{=}f(X(2ab+a+b))=\ln(2\cdot(2ab+a+b)+1)=\ln(4ab+2a+2b+1)$(3) $f(X(a))+f(X(b))=\ln(2a+1)+\ln(2b+1)=\ln(4ab+2a+2b+1)$(4), din (3),(4) f verifică relaţia 2)	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea

1.	**a)**	f continuă pe $(-\infty,0)$ şi pe $(0,\infty)$ -operaţii cu funcţii continue.(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{1}{2e^x}=\frac{1}{2}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(x\cdot\sin x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ $f(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow l_s(0)=l_d(0)=f(0)\Rightarrow f$ continuă în $x=0$ (2) Din (1) şi (2) $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive.	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
	b)	Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui $f\Rightarrow F$ derivabilă şi $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$ Pt $x\in(-\infty,0], F'(x)=f(x)=\frac{1}{2e^x}>0,\forall x\in(-\infty,0]$	**1p** **3p**

		$\Rightarrow F$ strict crescătoare pe $\left(-\infty,0\right]$.	1p
	c)	$\int \frac{1}{2e^x}dx=-\frac{1}{2e^x}+c_1$ $\int\left(x\cdot\sin x+\frac{1}{2}\right)dx=\int x\cdot\sin x dx-\ln\lvert x\rvert=-x\cdot\cos x+\sin x+\frac{1}{2}x+c_2$ Fie F o primitivă a lui f. $F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2e^x}+c_1 & ,x\le 0\\ -x\cdot\cos x+\sin x+\frac{1}{2}x+c_2 & ,x>0\end{cases}$ F derivabilă, deci continuă . F continuă în $x=0\Leftrightarrow\ l_s(0)=l_d(0)=F(0)\Rightarrow c_1-\frac{1}{2}=c_2$ $F(0)=0\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^x} & ,x\le 0\\ -x\cdot\cos x+\sin x+\frac{1}{2}x & ,x>0\end{cases}$ primitiva care se anulează în 0.	1p 2p 1p 1p
2.	a)	$I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+2x+3}dx=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2+2}dx=$ $=\int_1^2\frac{1}{t^2+2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big\|_1^2=$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{arctg}\frac{2}{\sqrt{2}}-\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{arctg}\sqrt{2}-\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	2p 2p 1p
	b)	$I_{n+2}+2I_{n+1}+3I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+3x^n}{x^2+2x+3}dx=\int_0^1\frac{x^n\cancel{\left(x^2+2x+3\right)}}{\cancel{x^2+2x+3}}dx=$ $=\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1=\frac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$	3p 2p
	c)	$\frac{x^n}{x^2+2x+3}\ge 0,\forall x\in[0,1],\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\int_0^1\frac{x^n}{x^2+2x+3}dx\ge 0\Rightarrow I_n\ge 0\,\forall n\in\mathbb{N}$ (1) $\frac{x^n}{x^2+2x+3}\le\frac{x^n}{1}\forall x\in[0,1],\forall n\in\mathbb{N}$ pt.că $x^2+2x+3>1,\forall x\in[0,1]$ $\Rightarrow\int_0^1\frac{x^n}{x^2+2x+3}dx\le\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1=\frac{1}{n+1}\Rightarrow I_n\le\frac{1}{n+1},\forall n\in\mathbb{N}$ (2) Din (1) şi (2)$\Rightarrow 0\le\lim\limits_{n\to\infty}I_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\overset{Tcleste}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$	1p 2p 1p 1p