TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a M2_*ştiinţe_ale_naturii*
10.12.2014

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi opusul elementului $\hat{3}$ în $(\mathbb{Z}_{10},+)$.

5p **2.** Arătaţi că $e=8$ este elementul neutru al legii de compoziţie $*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x*y=xy-7x-7y+56$.

5p **3.** Demonstraţi că legea $*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x*y=x+y+1, \forall x,y\in\mathbb{R}$ este asociativă.

5p **4.** Calculaţi: $\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{x^2+2}dx$.

5p **5.** Calculaţi: $\int_0^1 x\cdot e^x dx$.

5p **6.** Arătaţi că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^{-x^2}$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2xe^{-x^2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pe mulţimea $G=(2,\infty)$,fie legea de compoziţie $*:G\times G\to G$, $x*y=xy-2x-2y+6, \forall x,y\in G$.

5p **a)** Arătaţi că $x*y=(x-2)(y-2)+2, \forall x,y\in G$.

5p **b)** Să se rezolve în G ecuaţia: $x*x=x*5$.

5p **c)** Determinaţi $8'\in G$,simetricul lui 8 în raport cu legea $*$.

2. Fie mulţimea $G=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1 & a-1\\ 0 & a\end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{R}^*\right\}$.

5p **a)** Arătaţi că $O_2\notin G$ şi $I_2\in G$.

5p **b)** Demonstraţi că $A(a)\cdot A(b)=A(ab), \forall A(a),A(b)\in G$.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia : $f:G\to\mathbb{R}^*$, $f(A(a))=a$, are proprietatea că :
$f(A(a)\cdot A(b))=f(A(a))\cdot f(A(b)), \forall A(a),A(b)\in G$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculaţi: $\int_0^1(x^2+1)\cdot f(x)dx$.

5p **b)** Să se verifice că: $\int_0^1 f(x)dx=\ln(2e)$.

5p **c)** Să se arate că: $\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e(e-1)$.

2. Se consideră funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x^2+10}}, n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Determinaţi primitivele funcţiei f_0.

5p **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f_n este crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **c)** Determinaţi primitiva funcţiei f_1 al cărei grafic conţine punctul $A(\sqrt{6},10)$.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a M2_*ştiinţe_ale_naturii*
10.12.2014
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii
• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I

1.	$-\hat{3}=(\widehat{10-3})=$ $\hat{7}$	**4p** **1p**
2.	$8\in\mathbb{R}$ element neutru $\Leftrightarrow x*8=8*x=x, \forall x\in\mathbb{R}$ $x*8=8x-7x-56+56=x, \forall x\in\mathbb{R}$ $8*x=8x-56-7x+56=x, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x*8=8*x, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 8\in\mathbb{R}$ este e.n	**1p** **2p** **2p**
3.	$(x*y)*z=(x+y+1)+z+1=x+y+z+2, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $x*(y*z)=x+(y+z+1)+1=x+y+z+2, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z)\forall x,y,z\in\mathbb{R}\Rightarrow$ "$*$" asociativa	**2p** **2p** **1p**
4.	$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{x^2+2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big\|_0^{\sqrt{2}}=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4}$	**3p** **2p**
5.	$\int_0^1 x\cdot e^x\,\mathrm{dx}=x\cdot e^x\Big\|_0^1-\int_0^1 e^x dx=x\cdot e^x\Big\|_0^1-e^x\Big\|_0^1=$ $e-0-(e-1)=1$	**3p** **2p**
6.	$F'(x)=\left(e^{-x^2}\right)'=-2x\cdot e^{-x^2}=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ deci F este o primitivă a funcţiei f	**4p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea

1.	**a)**	$(x-2)\cdot(y-2)+2=xy-2x-2y+4+2=$ $=xy-2x-2y+6=x*y, \forall x,y\in G$	**3p** **2p**
	b)	$x*x=(x-2)^2+2$ $x*5=3x-4$ $(x-2)^2+2=3x-4\Leftrightarrow(x-2)^2=3(x-2)\Rightarrow x_1=2\notin G, x_2=5\in G\Rightarrow x=5$ soluţie	**2p** **1p** **2p**
	c)	$\exists e\in G$ a.i. $x*e=e*x=x, \forall x\in G\Leftrightarrow(x-2)\cdot(e-2)+2=(e-2)\cdot(x-2)+2=x, \forall x\in G$ $e=3\in G$ $8*8'=8'*8=3\Rightarrow(8-2)\cdot(8'-2)+2=(8'-2)\cdot(8-2)+2=3$ $8'=\frac{7}{3}>2\Rightarrow 8'=\frac{7}{3}$	**2p** **1p** **1p** **1p**

	a)	$O_2 \in G \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^* \, a,i.A(a)=O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a-1\\0&a\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}1=0\\a=1\\a=-1\\0=0\end{cases}$ imposibil $\Rightarrow O_2 \notin G$	2p
		$I_2 \in G \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^* \, a,i.A(a)=I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a-1\\0&a\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}1=1\\a=1\in\mathbb{R}^* \Rightarrow A(1)=I_2 \in G\\0=0\end{cases}$	3p
	b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1&a-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b-1\\0&1\end{pmatrix}=$	2p
		$=\begin{pmatrix}1&ab-1\\0&1\end{pmatrix}=A(ab)$	3p
	c)	$f\left(A(a)\cdot A(b)\right)\overset{b)}{=}f\left(A(ab)\right)=ab \quad (1)$	2p
		$f\left(A(a)\right)\cdot f\left(A(b)\right)=ab \quad (2)$	2p
		Din (1) şi (2) $\Rightarrow f\left(A(a)\cdot A(b)\right)=f\left(A(a)\right)\cdot f\left(A(b)\right), \forall A(a), A(b)\in G$	1p

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	$\int_0^1 \left(x^2+1\right) f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+2x+1\right)dx=\int_0^1 (x+1)^2\,dx=\left.\frac{(x+1)^3}{3}\right\|_0^1=$	4p
		$=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$	1p
	b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+1}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\left.x\right\|_0^1+\left.\ln\left(x^2+1\right)\right\|_0^1=$	3p
		$=1-0+\left(\ln 2-\ln 1\right)=\ln e+\ln 2=\ln(2e)$	2p
	c)	$\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=\left.e^{f(x)}\right\|_0^1=$	3p
		$e^{f(1)}-e^{f(0)}=e^2-e=e(e-1)$	2p
2.	a)	$F_0=\int f_0(x)dx=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+10}}dx=$	2p
		$=\ln(x+\sqrt{x^2+10})+C$	3p
	b)	Fie $F_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $f_n \Rightarrow F_n'(x)=f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x^2+10}}, \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}.$	3p
		$\Rightarrow F_n'(x)\geq 0, \forall x\in[0,\infty), \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow F_n$ crescătoare pe $[0,\infty), \forall n\in\mathbb{N}.$	2p
	c)	$\int f_1(x)dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+10}}dx=\sqrt{x^2+10}+C\Rightarrow F_1(x)=\sqrt{x^2+10}+c$ o primitivă a lui f_1	3p
		$A\left(\sqrt{6},10\right)\in G_{F_1}\Leftrightarrow F_1\left(\sqrt{6}\right)=10\Leftrightarrow 4+c=10\Rightarrow c=6\Rightarrow F_1(x)=\sqrt{x^2+10}+6$ este primitiva al cărei grafic conţine punctul $A\left(\sqrt{6},10\right)$	2p