TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a M2_*tehnologic*
10.12.2014

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic toate calificările profesionale
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$ suma $\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}$.

5p **2.**Fie legea de compoziţie $*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x*y=2x+3y-5, \forall x,y\in\mathbb{R}$.Calculaţi $2*(-3)$.

5p **3.**Fie legea de compoziţie $*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x*y=x+y+2, \forall x,y\in\mathbb{R}$.Rezolvaţi ecuaţia $x*3=7$.

5p **4.**Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+3x^2+4$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x+x^3+4x+1$.
Arătaţi că F este o primitivă a lui f.

5p **5.**Să se determine primitivele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$.

5p **6**. Să se calculeze $\int_1^2 \dfrac{3x^2+2x-3}{x^2}dx$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe $\mathbb{R}$ definim legea $x*y=xy-x-y+2, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=(x-1)(y-1)+1, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)**Determinaţi elementul neutru al legii $*$.

5p **c)**Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia : $x*x=5$.

2. Fie mulţimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$

5p **a)**Arătaţi că $I_2\in G$.

5p **b)** Să se arate că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y), \forall A(x),A(y)\in G$.

5p **c)**Calculaţi $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2014)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le 0\\ e^x \quad\quad, x>0\end{cases}$.

5p **a)**Arătaţi că funcţia f admite primitive.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^0 f(x)dx$.

5p **c)**Determinaţi $\int x\cdot f(x)dx$, $x\in(0,\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x}$.

5p **a)**Determinaţi $\int\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)dx$.

5p **b)**Să se arate că funcţia $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=x^2+x+\ln x$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)**Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a M2_*tehnologic*
10.12.2014
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I

1.	$\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}=\widehat{10}=\hat{0}$	**5p**
2.	$2*(-3)=2\cdot 2+3\cdot(-3)-5=$	**3p**
	$=4-9-5=-10$	**2p**
3.	$x*3=7 \Leftrightarrow x+3+2=7 \Leftrightarrow x+5=7$	**3p**
	$\Leftrightarrow x=2$	**2p**
4.	$F'(x)=e^x+3x^2+4+0=$	**3p**
	$=f(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ F este o primitivă pentru f.	**2p**
5.	$\int \frac{1}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}+C$ mulţimea primitivelor lui f.	**5p**
6.	$\int_1^2 \frac{3x^2+2x-3}{x^2}dx=\int_1^2\frac{3x^2}{x^2}dx+2\int_1^2\frac{x}{x^2}dx-3\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=$	**2p**
	$=3x\Big\vert_1^2+2\ln\lvert x\rvert\Big\vert_1^2+3\cdot\frac{1}{x}\Big\vert_1^2=$	**2p**
	$=3(2-1)+2(\ln 2-\ln 1)+3\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{3}{2}+2\ln 2$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea

1.	**a)**	$(x-1)\cdot(y-1)+1=xy-x-y+1+1=$	**3p**
		$=xy-x-y+2=x*y, \forall x,y\in\mathbb{R}$	**2p**
	b)	$\exists e\in\mathbb{R}$ a.î. $x*e=e*x=x, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (x-1)\cdot(e-1)+1=(e-1)\cdot(x-1)+1=x, \forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
		$\Rightarrow (x-1)\cdot(e-1)+1=x, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow e-1=1 \Rightarrow e=2\in\mathbb{R}$ element neutru	**3p**
	c)	$x*x=(x-1)^2+1$	**2p**
		$(x-1)^2+1=5 \Leftrightarrow (x-1)^2=4 \Rightarrow x_1=3\in\mathbb{R}, x_2=-1\in\mathbb{R}$ soluţiile ecuaţiei	**3p**
2.	**a)**	$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	**1p**
		Pentru $x=0\in\mathbb{R} \Rightarrow A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2\in G$	**4p**
	b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x+y\\0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$	**5p**

	c)	$A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2014)\overset{b)}{=}A(1+2+\cdots+2014)=$ $=A\left(\frac{(1+2014)\cdot 2014}{2}\right)=A(2015\cdot 1007)=\begin{pmatrix}1 & 2015\cdot 1007\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	f continuă pe $(-\infty,0)$ şi pe $(0,\infty)$ - funcţii continue.(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x^2+1)=1$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x=1$ $f(0)=1\Rightarrow l_s(0)=l_d(0)=f(0)\Rightarrow f$ continuă în $x=0$ (2) Din (1) şi (2) $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive.	1p 1p 1p 1p 1p
	b)	$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^2+1)dx=$ $=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_{-1}^{0}+\left.x\right\|_{-1}^{0}=$ $=\frac{0}{3}+\frac{1}{3}+0+1=\frac{4}{3}$	2p 2p 1p
	c)	Pt $x\in(0,\infty),\int x\cdot f(x)dx=\int x\cdot e^x dx=$ $=x\cdot e^x-\int e^x dx=x\cdot e^x-e^x+C$	2p 3p
2.	a)	$\int\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int(2x+1)dx=$ $=x^2+x+C$	2p 3p
	b)	$F'(x)=2x+1+\frac{1}{x}=$ $=f(x),\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow F$ este o primitivă pentru f.	3p 2p
	c)	Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui $f\Rightarrow F$ derivabilă şi $F'(x)=f(x),\forall x\in(0,\infty)$ $F'(x)=f(x)=2x+1+\frac{1}{x}>0,\forall x\in(0,\infty)$ $\Rightarrow F$ strict crescătoare pe $(0,\infty)$.	1p 3p 1p