CJEMCTA **Prof. Petcu Daniela**

Tema 6

22.11.2014

Mulțimea numerelor reale. Modul. Partea întreagă, partea fracționară.

Metoda reducerii la absurd

NOȚIUNI TEORETICE

Modulul unui număr real: $|a| = \begin{cases} a, dacă\ a \geq 0 \\ -a, dacă\ a \leq 0 \end{cases}$

Proprietăți:

1.$|a| = 0 <=> a = 0$

2.$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \forall b \neq 0, \forall a \in R$

4. $|a^n| = |a|^n\ \forall\, n \in N^*, \forall\, a \in R$

5.$|a + b| \leq |a| + |b|$ cu egalitate doar pentru $ab \geq 0$

6. $|a - b| \leq |a| + |b|$ cu egalitate doar pentru $ab \leq 0$

7. $|a - b| \geq ||a| - |b||$, $\forall a, b \in R$

8. $|a| \geq 0$, $\forall\, a \in R$

Partea întreagă. Partea fracționară

Se numește *parte întreagă* a numărului real x cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x. Se notează [x]

Se numește *parte fracționară* a numărului real x diferența dintre x și partea lui întreagă. Se notează {x} . Așadar , {x}=x-[x]

Proprietăți: Pentru orice număr real x și pentru orice număr întreg k au loc relațiile:

1. $[x]\in Z$, $0\leq\{x\}< 1$
2. $x=[x]+ \{x\}$
3. $[x] \leq x<[x]+1$
4. $[x+k]= [x]+k$
5. $\{x+k\}=\{x\}$
6. $\{x\}=0 \Leftrightarrow [x]=x \Leftrightarrow x\in Z$

Inegalitatea lui Hermite: $[x]+ [x+\frac{1}{n}]+ [x+\frac{2}{n}]+........+[x+\frac{n-1}{n}]= [nx]$, $\forall\, n \in N^*$

Caz particular: [x]+ [x+$\frac{1}{2}$]= [2x](n=2)

[x]+ [x+$\frac{1}{3}$]+ [x+$\frac{2}{3}$]= [3x](n=3)

Rețineți!

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $\qquad$ $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ $\qquad$ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2c$

PROBLEME PROPUSE

1. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor,pentru orice n$\in N^*$

a) $\sqrt{1+3+5+\cdots+95} \in Q$; b)$\sqrt{5n+7} \in$ R\Q ;

c)$\sqrt{2+2^2+2^3+\cdots 2^{101}} \in$ R\Q ; d)$\sqrt{1+2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 3^{1953}} \in Q$;

$e)$ $\sqrt{6^n+2013} \in Q$ f)$\sqrt{2012^{2013}+2013^{2012}} \in Q$; g) $\sqrt{4n+3} \in$ R\Q ;

h) $\sqrt{n^2+n} \in Q$; i) $\sqrt{3^n+7^{n+1}} \in$ R\Q.

2. Arătați,utilizând metoda reducerii la absurd ,că următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{2}$ +$\sqrt{5}$; c) $\sqrt{2}$ +$\sqrt{3}$+ $\sqrt{7}$.

3. Să se afle numărul natural n de patru cifre știind că $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}} \in N$.

4 . a) Fie a și b numere raționale, astfel încât a+b$\sqrt{2}$=0 .Arătați că a=b=0.

b) Determinați numerele raționale x și y astfel încât: 2x + $\sqrt{2x^2-8xy+8y^2}$ = y+13.

5. Dacă a,b,c,d $\in Z, a+\frac{b}{\sqrt{2}}+\frac{c}{\sqrt{4}}+\frac{d}{\sqrt{8}}=0$ iar a și d sunt consecutive,demonstrați că

$\sqrt{|c|} \in$ R\Q.

6. Fie a,b,c,d $\in Q$,astfel incât a+b$\sqrt{2}$ =c+d$\sqrt{2}$. Demonstrați că b=d și a=c.

7. Aflați a,b,c $\in N$,astfel încât $\sqrt{3+c\sqrt{2}}$= a+b$\sqrt{2}$.

8. a) Fie a , b și c numere raționale, astfel încât a$\sqrt{2}+b\sqrt{5}+c$=0.Arătați că a=b=c=0.

b) Determinați numerele raționale x și y astfel încât:
$\sqrt{8x^2-8xy+2y^2}+\sqrt{5y^2+10yz+5z^2} = 2z-1$

9. Fie a , b și c numere raționale, astfel încât ab+ac+bc=1. Arătați că$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$ este rațional.

10. Aflați valorile naturale ale lui n astfel încât $\sqrt{12-\sqrt{n-12}}$ ∈N.

11. Există numere naturale $\underbrace{\overline{aaaaa\ldots a}}_{n}$, 2 ≤n∈N, în sistemul zecimal, astfel încât

$\underbrace{\sqrt{\overline{aaaaa\ldots a}}}_{n} \in Q$? (G.M.B)

12.Să se aducă la forma cea mai simplă următoarele expresii:

a)E=|x-|3-x||+2x,x>3 ; b)E=|x-2|+|4-2x|, x>2; c) E=$\sqrt{(a-b)^2}$-|b-c|+|c-a|,a<0<b<c.

13. Să se rezolve ecuațiile pe mulțimea specificată:

a)|3x-|2-x||-2=x, x>2; b)$\sqrt{(x+2)^2}$ - $\sqrt{(x+3)^2}$+$\sqrt{(9-7x)^2}$=$\sqrt{(x-5)^2}$,-3≤ $x \leq -2$

14. Fie a,b,c ∈ **R.** Arătați că $\frac{|a-b|+|b-c|+|c-a|}{2} = max(a,b,c) - \min(\mathrm{a,b,c})$

15. Se consideră numerele reale a, b, c. Arătați că are loc inegalitatea $|x-a| + |x-b| \geq |2x-c|, \forall\, x \in R$ dacă și numai dacă a+b=c.

16. Fie a,b ∈ **R** astfel încât să existe m∈ $\mathbf{R}^+$,m < 2 cu proprietatea:$|a+b| + |a-b| = m[a]$.

Demonstrați că a = b = 0.

17. Arătați că $|x+y| + |x-y| = |x| + |y| <=> x^2 = y^2$.

18. Calculați partea întreagă a numerelor pentru orice n∈N:

a)-7$\sqrt{2}$; b) $\sqrt{2}$+$\sqrt{3}$; c) $\sqrt{n^2+1}$; d) $\sqrt{n^2+n}$; e) $\sqrt{9n^2+6n+2}$.

19. Calculați:

[$\sqrt{1\cdot 2}$] + [$\sqrt{2\cdot 3}$] +[$\sqrt{3\cdot 4}$]+ ...+ [$\sqrt{24\cdot 25}$] .

20. Rezolvați ecuațiile:

a)[2x-3]=5; b)[$\frac{3x+4}{5}$]= $\frac{4x+3}{5}$; c)2{x}-[x]= $\frac{1}{4}$;

21. Să se determine mulțimea A=$\left\{x \in Z / \left[\sqrt{x-1}\right] = \frac{x-5}{2}\right\}$

22. Să se rezolve în Q_+ ecuația $\left\{\frac{3x+5}{x+2}\right\} + \left[\frac{3x+2}{x+1}\right] = 2,(7)$. (G.M.B.)

23. Rezolvați,folosind Identitatea lui Hermite, ecuațiile:

a) {x}-{2x}=x; b)[x]+$\left[x+\frac{1}{5}\right]$+$\left[x+\frac{2}{5}\right]$+$\left[x+\frac{3}{5}\right]$+$\left[x+\frac{4}{5}\right]$=4x+2.

24. Să se calculeze: $\sqrt{\left[\sqrt{1\cdot 3}\right] + \left[\sqrt{3\cdot 5}\right] + \left[\sqrt{5\cdot 7}\right] + \cdots + \left[\sqrt{2011\cdot 2013}\right]}$

25. Să se calculeze suma:$\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right] + \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{n+\sqrt{n}}{n}\right]$,n∈$N^*$\{1}.

26. Fie numărul a=$\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+\cdots+\sqrt{2^{99}}\ si\ b=2^{50}-\sqrt{2}$. Calculați partea întreagă a numărului $\frac{b}{a}$.

***TEMĂ*:** ex.1 d), f) ; 2 c); 8; 12 b),c); 18 c),e); 21;25

Bibliografie:

1. Artur Bălăucă – OLIMPIADE, CONCURSURI ŞI CENTRE DE EXCELENŢĂ – clasa a VII-a, Editura TAIDA, Iaşi, 2012
2. Dan Brânzei (coordonator) – Matematică: olimpiade şi concursuri şcolare, Editura PARALELA 45, Piteşti, 2010
3. Colecţia GAZETA MATEMATICĂ
4. Maranda Linț, Dorin Linț, Rozalia Marinescu, Dan Marinescu, Mihai Monea, Steluța Monea, Marian Stroe - Matematică de excelență pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență

5.www.olimpiade.ro

6.www.mategl.com