Sume. Numere raţionale

1. Arătaţi că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1023}>5{,}5$

2. Fie $n\in N^{*}$; $n>1$. Arătaţi că

   a) $(n-1)\cdot(n+1)<n^2$ şi

   b) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<1{,}25$

3. Arătaţi că $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2500}<1$. Arătaţi că $\frac{1}{2}<a<1$

   Profesor Ioan Sofic

4. Calculaţi $S=\frac{17}{15}+\frac{37}{35}+\frac{65}{63}+\ldots+\frac{1937}{1935}$

Concurs "David Hrimiuc", 2008, Gura Humorului

5. Arătaţi că $\forall\, n\geq 1$ $S=1-\frac{3}{1^2\cdot 2^2}-\frac{5}{2^2\cdot 3^2}-\frac{7}{3^2\cdot 4^2}-\ldots-\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}>0$

6. Arătaţi că

   a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b}$

   b) $\frac{1}{36}+\frac{1}{37}+\ldots+\frac{1}{70}>\frac{3}{5}$

Profesor Gheorghe Moţoc, Concurs "Trepte în matematică", 2007

7. Arătaţi că $\forall\, n\in N^{*}$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{27}+\frac{1}{24}+\frac{2}{75}+\ldots+\frac{2}{3\cdot n^2}<1$$

8. a) Arătaţi că $\forall\, n \in N^*$ are loc egalitatea $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

b) Fie numărul

$A=\sqrt{1}+\sqrt{1+3+5}+\sqrt{1+3+5+7+9}+\ldots+\sqrt{1+3+5+\ldots+2013}$. Arătaţi că A este pătrat perfect.

9. Fie numărul $B=\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{6}+\frac{6}{9}+\frac{7}{12}+\ldots+\frac{78}{225}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{75}\right)$. Arătaţi că $\sqrt{B}\in N$.

10. Fie $a,b\in N^*$ astfel încât $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}+\frac{a+2}{b+2}+\ldots+\frac{a+2007}{b+2007}=2008.$

Arătaţi că $\frac{(a+b+2)^{2007}}{(a+1)^{2007}+(b+1)^{2007}}$ este număr natural.

11. Aflaţi $x\in R$ din egalităţile:

a) $x\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013}\right)=\frac{1}{2014}$

b) $x\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}\right)=100-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\ldots-\frac{99}{100}$

c) $\frac{x-3}{2008}+\frac{x-5}{2006}+\frac{x-7}{2004}+\frac{x-9}{2002}=\frac{x-2008}{3}+\frac{x-2006}{5}+\frac{x-2004}{7}+\frac{x-2002}{9}$

Temă

12. a) Demonstraţi că $\frac{x+n}{n+1}\geq\frac{n+3}{2x+n+1}$, $\forall\, x,n\in N^*$

b) Aflaţi $x\in N^*$ din egalitatea

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\ldots+\frac{x+2009}{2010}=\frac{4}{2x+2}+\frac{5}{2x+3}+\ldots+\frac{2012}{2x+2010}$$

13. Calculaţi sumele:

a) $S_1 = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)$; $\forall\, n \geq 1$

b) $S_2 = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$

c) $S_3 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$

d) $S_4 = 1\cdot 3 + 3\cdot 5 + 5\cdot 7 + \ldots + (2n-1)\cdot(2n+1)$

e) $S_5 = 1\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 5\cdot 7 + \ldots + (2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)$

e) $S_6 = 1\cdot 4 + 4\cdot 7 + 7\cdot 10 + \ldots + (3n+1)\cdot(3n+4)$

14. Calculaţi suma $S = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$

BIBLIOGRAFIE:

[1] *A. Schneider* – Culegere de matematică, Ed. Hiperion, 2009

[2] *A. Bălăucă*- Culegere de matematică, Ed. Taida, 2012,

[3] Culegere de matematică pentru excelenţă, Ed. Paralela 45, 2013

[4] *D. Brânzei, M. Goleşteanu* - Matematica în concursurile şcolare, Ed. Paralela 45, 2010,

[5] Gazeta matematică, 2012

Zamfirescu Lavinia,

Liceul Teotetic Traian,

Constanţa, Romania

E-mail: zamfiresculavi2007@yahoo.com