CJEMCTA Prof. Petcu Daniela

Tema 7

7.12.2014

Inegalități. Probleme de maxim și minim

Inegalitatea mediilor:

Pentru $\forall$ *a,b>0,* $\min(a,b) \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b)$, *cu egalitate pentru a=b*

$m_h=\frac{2ab}{a+b}$ media armonică; $m_g=\sqrt{ab}$ media geometrică ;

$m_a=\frac{a+b}{2}$ media aritmetică; $m_p=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ media pătratică.

Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz:

$(x_1a_1 + x_2a_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(a_1^2 + a_2^2)$, $x_1,a_1,x_2a_2 \in \mathbf{R}$

Egalitate$\Leftrightarrow$ $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2}$

Alte inegalități:

1) $a+\frac{1}{a} \geq 2\ \forall a > 0$.

2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ pentru orice numere reale a și b,având același semn.

PROBLEME PROPUSE

1.Utilizând inegalitatea mediilor,demonstrați:

a)$(x+y)(x+z)(y+z) \geq 8xyz$,$\forall x,y,z > 0$

b)$(1+x)(1+y) \geq 4\sqrt{xy}$, $\forall x,y > 0$

c)$(a^2+1)(b^2+4)(c^2+9) \geq 48abc$, $\forall a,b,c > 0$

d)$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \leq \frac{a+b+c}{2}$, $\forall a,b,c > 0$

e)$\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{20}+\sqrt{30}+\sqrt{42}+\sqrt{56} < 30$

f)$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\ldots+\frac{\sqrt{2007}}{2008} < 1003$

g) $\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{42}}{13}+\ldots+\frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1}<\frac{n}{2}$, n>0

2. Arătați că:

a) $\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6 \;\; \forall\, a,b,c>0;$

b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9 \;\; \forall\, a,b,c>0.$

3. Fie a,b,c numere reale pozitive ,astfel încât $a\cdot b\cdot c=1$. Să se arate că:

$(a+b)(b+c)(a+c)(a+b+c)\geq 24$

4. Fie a,b,c ,d numere reale pozitive ,astfel încât a+b+c+d=4. Să se arate că

$(a+b)(b+c)(d+c)(a+d)\leq 16$

5. Dacă x,y,z∈(0,1) astfel încât $x\cdot y\cdot z=\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-z^2}$,să se determine maximul expresiei xyz.

6. Fie x,y,z ∈ R astfel încât x+2y+3z=10.Determinați minimul expresiei $(x^2+y^2+z^2)$ și pentru ce valori ale lui x,y,z se realizează,folosind Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz.

7. Fie a,b,c,d numere reale oarecare. Dacă $a+2b+3c+4d\geq 30$ arătați că $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 30$, folosind Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz:

8. Demonstrați că oricare ar fi a,b,c numere reale pozitive avem: $2a^2+3b^2+6c^2\geq(a+b+c)^2$.

9.Fie a,b,x,y numere reale pozitive astfel încât x+y=c(constantă). Determinați minimul expresiei $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$ și pentru ce valori ale lui x și y se realizează.

10. Să se calculeze valoarea maximă a expresiei $\frac{8x^2}{x^4+4}$ pentru x∈ $\boldsymbol{R}$.

11. Fie x,y,z numere reale mai mari sau egale cu 1 și $E=\frac{\sqrt{xy-1}}{xy}+\frac{\sqrt{yz-1}}{yz}+\frac{\sqrt{zx-1}}{zx}$. Arătați că maximul expresiei este $\frac{3}{2}$. Precizați în ce condiții se obține acest maxim.

12. Dacă x,y,z ∈ $\boldsymbol{R}_+$ și xyz(x+y+z)=1,să se calculeze min[(x+y)(x+z)].

13. Arătați că dacă x,y,z∈ $\boldsymbol{R}$ și x+y+z=1 atunci $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\frac{1}{xyz}$.Când are loc egalitatea?

14. Dacă a,b,c sunt numere reale strict pozitive ,să se arate că:

$\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(a+c)}+\sqrt{b(a+c)}\leq\sqrt{2}(a+b+c).$

15 .Arătați că: $\left(\frac{18}{7}\right)^7+\left(\frac{18}{11}\right)^7>256.$

16. Fie a,b>0 astfel încât (2a+5)(b+1)=6. Aflați valoarea minimă a expresiei $4ab+\frac{1}{ab}$ și aflați a și b pentru care se obține această valoare.

17. a) Arătați că oricare ar fi a>0 are loc inegalitatea $a^3+2\geq 3a.$

b) Fie a,b,c>0 astfel încât a+b+c=3.Arătați că minimul expresi $a^3+\ b^3+\ c^3$ este 3.

18 . Fie a,b,c>0 astfel încât $a+b+c=3\sqrt{abc}$. Arătați că maximul expresiei E=$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$ este $\frac{3}{2}$

TEMĂ

Problemele: 1 g) ;2 b);4; 8; 9; 15; 18.

Bibliografie:

1. Artur Bălăucă – OLIMPIADE, CONCURSURI ŞI CENTRE DE EXCELENŢĂ – clasa a VII-a, Editura TAIDA, Iaşi, 2012
2. Dan Brânzei (coordonator) – Matematică– olimpiade şi concursuri şcolare, Editura PARALELA 45, Piteşti, 2010
3. Colecţia GAZETA MATEMATICĂ
4. www.olimpiade.ro
5. www.mategl.com