LECŢIA 5. CLASA a -V- a

ECUAŢII ŞI INECUAŢII ÎN ℕ

PARTEA I: ECUAŢII ÎN ℕ

CONSIDERAŢII TEORETICE

Rezolvarea unei clase de ecuaţii diofantice

$$(x-1)^n + x^n + (x+1)^n = y^2$$

Definiţie: Fie *a,b*∈ ℕ şi *n* ∈ ℕ*. Spunem că numărul **a** este congruent cu **b** modulo **n**, notând $a \equiv b\ (mod\ n)$, dacă $(a-b) \vdots n$ sau,echivalent, dacă prin împărţirea numerelor a şi b la n se obţine acelaşi rest.

Exemple:

1) $57 \equiv 37\ (mod\ 10)$
37 : 10 = 3, rest 7
57 : 10 = 5, rest 7
sau *57 – 37* $= 20 \vdots 10$

2) $34 \equiv 2 (mod\ 8)$ *pentru că*
34 : 8 = 4, rest 2
sau *34 – 2* $= 32 \vdots 8$

Criterii de rezolvare a ecuaţiilor de tipul $(x-1)^n + x^n + (x+1)^n = y^2$ **:**

1. O condiţie necesară (dar nu şi suficientă) ca o ecuaţie din clasă să aibă soluţii este: n impar

2. Dacă *x* este impar, *x* nu este congruent cu 1(mod8) (adică restul obţinut prin împărţirea lui *x* la 8 nu este 1), atunci pentru n>1 ecuaţia nu are soluţii.

3. A) Dacă $x \equiv 1\ sau\ 2\ (mod\ 7)$ (adică împărţindu-l pe *x* la 7 se obţine restul egal cu 1 sau 2), atunci *n=6k+3*
4. B) Dacă $x \equiv 0\ sau\ 3\ (mod 7\ )$, nu putem spune nimic.
   C) Dacă $x \equiv 4\ (mod\ 7)$, ecuaţia nu are soluţii.
   D) Dacă $x \equiv 5\ (mod\ 7)$, rezultă că $n = 6k + 1$ sau 5.
   E) Dacă $x \equiv 6\ (mod\ 7)$, atunci $n = 6k + 5$

4. A) Dacă resturile împărţirii lui *x* prin 9 sunt 1,2,3,6,7 sau 8, atunci $n = 6k + 3$.
   B) În celelalte cazuri nu putem spune nimic.
5. A) Dacă $x \equiv 1\ (mod\ 5)$, atunci $n = 4k + 3$.

B) Pentru celelalte resturi nu putem spune nimic.

6. A) Dacă $x \equiv 1\ (mod\ 13)$, rezultă că $n = 6k + 1$.
   B) Dacă $x \equiv 2\ sau\ 5\ (mod\ 13)$, ecuaţia nu are soluţii.

Exerciţii propuse:

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $18^n + 19^n + 20^n = y^2$

b) $26^n + 27^n + 28^n = y^2$

2. Determinaţi valorile naturale ale lui x în fiecare dintre cazurile:

a) $(x+2)(x+3) + (x+3)(x+4) = 2048$

b) $x + (x-5) + (x-10) + (x-15) + \cdots + (x-2015) = 2222$

c) $3^{x+3} \cdot 4^{x+1} - 105 \cdot 3^x \cdot 4^x = 432$

3. Să se afle numărul natural x din relaţiile:

   a) $1 + 2 \cdot \{3^2 + 7 \cdot [5^4 - 4 \cdot (x - 3 \cdot 5^4)]\} + 2014^{0^{37}} = 1994$

   b) $\{5 \cdot [(2^9 \cdot 30^{101})^3 :((2^{101})^3 \cdot 15^{303}) + x - (2^3)^9]\} : 2 = 25$

4. Fie $N = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2006 \cdot 2007 + 2007 \cdot 2008 + 2007) : (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 2008 \cdot 2009 - 2007 \cdot 2009)$.
   Rezolvaţi ecuaţia $(8^2 - 2^3 \cdot 7) \cdot 3^{2x} = 5^{2014} : 5^{2011} - (\mathrm{N} + 4^3 - 3 \cdot 2^2)$.

5. Rezolvaţi in $\mathbb{N}$ ecuaţiile:

   a) $x + 2^{2015} - 2^{2014} - 2^{2013} - \cdots - 2^2 - 2 - 1 = 2015$

   b) $5 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 + \ldots + 5 \cdot 6^{2014} = x^{2015} - 1$

6. Determinaţi valorile naturale ale lui n si cifra nenulă *x* pentru care:
   $3^{n+6} + 3^{n+5} + 3^{n+4} + 2 \cdot 3^{n+3} + 4 \cdot 3^n = \overline{xxxx}$

7. Aflaţi $\mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\mathrm{n}! + 3 = \mathrm{m}^2$, unde $\mathrm{n}! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \mathrm{n}$

8. Să se determine cifrele a si b astfel incât: $\overline{aaa}^3 \cdot b^2 = \overline{bbb}^3$

9. Aflaţi numărul impar *x* din relaţia: $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + x = 16^{1006}$

10. Să se afle $x \in \mathbb{N}$, $x>1$ ştiind că: $12^x - 4^{x+1} - 3^{x+1} + 12 = 1403$

11. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia : $xy + xz + yz + 7z = 10$

Temă:

1. Determinaţi valorile naturale ale lui x în fiecare dintre cazurile:
   a) $x(x+2)+(x+2)(x+4)=1458$
   b) $x+2x+4x+6x+\ldots+18x=910$
   c) $x+(x+3)+(x+6)+\ldots+(x+147)=4175$

2. Aflaţi $x \in \mathbb{N}$ ştiind că:
   $49^{2x} - 1 = 6 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + \ldots + 6 \cdot 7^{2015}$

3. Să se afle numărul natural x din relaţiile:
   a) $1 + 3 \cdot \{4^2 + 5 \cdot [3^6 - 6 \cdot x \cdot (2^3 - 2^2)]\} + 2015^0 = 1985$
   b) $\{5 \cdot [(2^9 \cdot 40^{101})^2 : (200 \cdot 2^{309} \cdot 5^{99})^2 + x] - 5\} : 10 - 5^2 = 0^{2014}$

4. Rezolvaţi in $\mathbb{N}$ ecuaţia: $xy + xz + yz + 3z = 5$

5. Rezolvaţi ecuaţiile:
   a) $7^{x+4} - 41 \cdot 7^{3x} = 7^{x+3} + 7^{x+2}$
   b) $2^{2x+3} + 2^{3y+1} + 2^{z+1} = 176$
   c) $7 \cdot 3^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+1} + 3 \cdot 5^x = 480$

6. Să se studieze existenţa soluţiilor următoarelor ecuaţii:
a) $34^x + 35^x + 36^x = y^2$
b) $74^x + 75^x + 76^x = y^2$

7. Determinaţi numerele naturale nenule x,y astfel încât $1!+2!+\ldots+x!=y^2$,
   unde $x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$

Bibliografie:

[1] I. Cucurezeanu - Ecuaţii în numere intregi, Editura Aramis, Bucureşti, 2006

[2] I. Cucurezeanu – Pătrate şi cuburi de numere întregi, Editura Gil Zalău, 2007

[3] Radu Gologan – Olimpiade şi concursuri şcolare 2011, clasele IV-VI, Editura Paralela 45, 2011

[4] Artur Bălăucă – 1300 de probleme semnificative, Olimpiade, Concursuri şi Centre de Excelenţă clasa a V- a, Editura Taida, Iaşi, 2012

[5] Colecţia Gazeta Matematică, Bucureşti, 2013-2014

[6] Colecţia Revista de Matematică şi Informatică, Constanţa, 2008-2013

Teodorov Corina Loredana
Şcoala Gimnazială nr.24 „Ion Jalea”,
Constanţa, România
E-mail: corina.teodorov@yahoo.com