

Lecția 4 – clasa a VI-a  
 Unghiuri – Aplicații  
 08.11.2014

**Probleme rezolvate:**

1. În interiorul unghiului AOB, cu măsura de  $140^\circ$ , se consideră punctele C și D astfel încât C aparține interiorului unghiului AOD. Dacă a,b,c sunt numere prime cu proprietatea că  $a+10b+6c=62$ ,  $a \cdot m(\angle COD) = b \cdot m(\angle AOC)$  și  $b \cdot m(\angle BOC) = c \cdot m(\angle COD)$ , aflați măsurile unghiurilor AOC, COD și DOB.

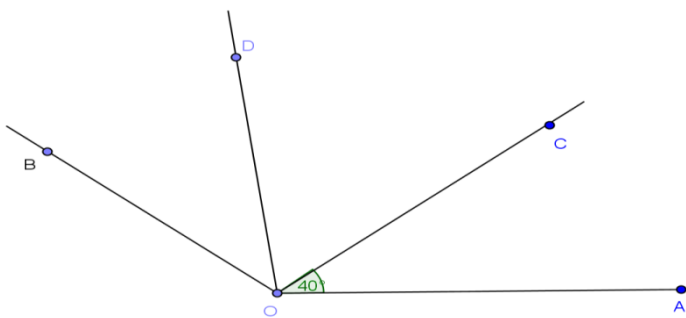
Soluție:

$$\left. \begin{array}{l} a + 10b + 6c = 62 \\ 10b \in M_2 \\ 6c \in M_2 \\ 62 \in M_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \in M_2 \\ a \text{ nr. prim} \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2 + 10b + 6c = 62 \Leftrightarrow 10b + 6c = 60 \Leftrightarrow 5b + 3c = 30$$

$$\left. \begin{array}{l} 5b + 3c = 30 \\ 3c \in M_3 \\ 30 \in M_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5b \in M_3 \\ (3,5) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b \in M_3 \\ b \text{ nr. prim} \end{array} \right\} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 15 + 3c = 30 \Leftrightarrow 3c = 15 \Leftrightarrow c = 5$$

$$2 \cdot m(\angle DOC) = 3 \cdot m(\angle AOC) \Rightarrow m(\angle AOC) = \frac{2 \cdot m(\angle DOC)}{3}$$

$$3 \cdot m(\angle BOC) = 5 \cdot m(\angle DOC) \Rightarrow m(\angle BOC) = \frac{5 \cdot m(\angle DOC)}{3}$$



$$m(\angle AOB) = m(\angle AOC) + m(\angle BOC) \Rightarrow \frac{2 \cdot m(\angle DOC)}{3} + \frac{5 \cdot m(\angle DOC)}{3} = 140^\circ \Leftrightarrow 7 \cdot m(\angle DOC) = 420^\circ \Rightarrow m(\angle DOC) = 60^\circ$$

$$m(\angle AOC) = \frac{2 \cdot 60^\circ}{3} = 40^\circ \text{ și } m(\angle BOC) = \frac{5 \cdot 60^\circ}{3} = 100^\circ$$

$$m(\angle DOB) = m(\angle BOC) - m(\angle DOC) = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$$

2. În jurul unui punct O sunt 27 de unghiuri având măsurile în grade exprimate prin numere naturale. Arătați că cel puțin două dintre unghiuri sunt congruente.

(\*\*\* - G.M. nr. 12/2008)

Soluție:

Să presupunem că toate cele 27 de unghiuri au măsurile diferite și acestea sunt cele mai mici numere naturale în condițiile date.

Avem  $1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 27^\circ = 378^\circ$ , dar suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este de  $360^\circ$ . Rezultă că cel puțin două dintre unghiuri au măsurile egale, adică sunt congruente.

3. Se dă un unghi cu măsura de  $52^\circ$ . Folosind numai rigla, echerul și compasul, construiți în interiorul său un unghi cu măsura de  $3^\circ 30'$ . (Explicați modul în care ați procedat)

(Eugenia Cristinoi și Eugen Spaciu, G.M. nr. 6/2010)

Soluție:

Fie  $\sphericalangle AOB$  cu măsura unghiului de  $52^\circ$ . Construim  $OC \perp OB$ , deci  $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ$ . Construim (OD bisectoarea  $\sphericalangle BOC$  și rezultă  $m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle COD) = \frac{m(\sphericalangle BOC)}{2} = 45^\circ$ .

$m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle AOB) - m(\sphericalangle BOD) \Rightarrow m(\sphericalangle AOD) = 52^\circ - 45^\circ = 7^\circ$

Construim (OE bisectoarea  $\sphericalangle AOD$  și rezultă  $m(\sphericalangle AOE) = m(\sphericalangle EOD) = \frac{m(\sphericalangle AOD)}{2} = 3^\circ 30'$ .

4. Un ceas arată ora 6 și 52 de minute fix. Să se afle măsura unghiului format de acul orar și acul minutar.

Soluție:

În 12 ore, acul orar parcurge  $360^\circ$ , deci într-o oră se deplasează cu  $360^\circ : 12 = 30^\circ$ , iar timp de un minut, acul orar descrie un unghi cu măsura de  $30^\circ : 60 = 30'$

În 60 minute, acul minutar parcurge  $360^\circ$ , deci într-un minut acul minutar descrie un unghi cu măsura de  $360^\circ : 60 = 6^\circ$ .

Presupunem pornirea acelor de la ora 6 fix; în 52 de minute, acul orar descrie un unghi cu măsura de  $52 \cdot 30' = 1560' = 26^\circ$ , iar acul minutar descrie un unghi cu măsura de  $52 \cdot 6^\circ = 312^\circ$ , deci măsura unghiului dintre ace este:  $312^\circ - (180^\circ + 26^\circ) = 106^\circ$

### Probleme propuse:

- Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și unghiurile proprii  $\sphericalangle A_1OA_2, \sphericalangle A_2OA_3, \sphericalangle A_3OA_4, \dots, \sphericalangle A_nOA_1$  în jurul punctului O, cu  $m(\sphericalangle A_1OA_2), m(\sphericalangle A_2OA_3), \dots, m(\sphericalangle A_nOA_1)$  numere naturale pare în ordine crescătoare (exprimate în grade). Să se determine valoarea maximă a numărului n, iar pentru valoarea găsită să se calculeze măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor  $\sphericalangle A_5OA_6$  și  $\sphericalangle A_9OA_{10}$ .
- În jurul punctului O sunt desenate unghiuri având măsurile în ordinea  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ, 7^\circ, 8^\circ, 9^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ, 7^\circ, 8^\circ, 9^\circ$  și așa mai departe.
  - Câte unghiuri sunt desenate în jurul punctului O?
  - Notăm  $O_1, O_2, O_3, \dots$  unghiurile determinate anterior în jurul punctului O. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor  $\sphericalangle O_6$  și  $\sphericalangle O_{14}$ .  
(Etapa locală, Neamț, 2010)
- Unghiul alungit  $\sphericalangle A_1OA_{19}$  este împărțit în 18 unghiuri adiacente de semidreptele  $[OA_2, [OA_3, \dots, [OA_{18}$ , astfel încât  $m(\sphericalangle A_2OA_3) = m(\sphericalangle A_1OA_2) + 1^\circ, m(\sphericalangle A_3OA_4) = m(\sphericalangle A_2OA_3) + 1^\circ, m(\sphericalangle A_4OA_5) = m(\sphericalangle A_3OA_4) + 1^\circ, \dots, m(\sphericalangle A_{18}OA_{19}) = m(\sphericalangle A_{17}OA_{18}) + 1^\circ$ .
  - Arătați că  $1^\circ < m(\sphericalangle A_1OA_2) < 2^\circ$
  - Arătați că  $m(\sphericalangle A_1OA_3)$  este exprimată printr-un număr natural de grade.
  - Arătați că  $m(\sphericalangle A_{12}OA_{18}) = 90^\circ$ .

4. Fie  $\angle ABC$  și  $\angle ABD$  două unghiuri complementare neadiacente și  $[BE$  o semidreaptă cu proprietatea că  $\angle ABE$  și  $\angle EBD$  sunt adiacente având măsurile  $x^\circ y'$ , respectiv  $y^\circ x'$ , unde  $x$  și  $y$  sunt două numere naturale cu suma 60. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor  $\angle ABC$  și  $\angle ABD$ .  
(Etapa județeană, Hunedoara, 2002)
5. Se consideră două unghiuri adiacente  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOC$  de măsuri  $108^\circ$ , respectiv  $68^\circ$ . Semidreptele  $[OM$ ,  $[ON$  și  $[OP$  sunt bisectoarele unghiurilor  $\sphericalangle AOB$ ,  $\sphericalangle BOC$ , respectiv,  $\sphericalangle MON$ . Pe semidreapta opusă lui  $[OP$  considerăm un unghi  $P'$ , iar în interiorul unghiului  $\sphericalangle AOP'$  alegem un punct  $B'$  astfel încât  $m(\sphericalangle B'OP') = 10^\circ$ . Să se arate că punctele  $B$ ,  $O$ ,  $B'$  sunt colineare.  
(Al. Gabriel Mîrșanu, G.M. nr. 12/2009)
6. a) Care este măsura unghiului format de minutarul și orarul unui ceas, atunci când acesta indică ora 4 fix?  
b) Care este măsura unghiului format de minutarul și orarul unui ceas, atunci când acesta indică ora 4 și 12 minute fix?  
(Etapa locală, Călărași 2009, prof. Sorin Furtună)
7. Se consideră unghiul  $MON$  și  $(OR \subset \text{Int}(\sphericalangle MON), (OP \subset \text{Int}(\sphericalangle ROM))$ , astfel încât să fie satisfăcute următoarele relații:  
1)  $m(\sphericalangle ROM) = 60^\circ$  2)  $m(\sphericalangle POM) - m(\sphericalangle RON) = 14^\circ 41'$   
a) Calculați  $m(\sphericalangle NOP)$   
b) În plus, știind că  $(OP$  este bisectoarea  $\sphericalangle NOM$ , calculați  $m(\sphericalangle ROP)$   
(Etapa județeană, Olt, 2010)
8. Unghiurile  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOC$  sunt adiacente cu  $m(\sphericalangle AOC) = 120^\circ$ ,  $[OM$  este bisectoarea  $\sphericalangle AOB$ , iar  $[ON_1$ ,  $[ON_2$ ,  $[ON_3$  sunt bisectoarele unghiurilor  $\sphericalangle COB$ ,  $\sphericalangle CON_1$  respectiv  $\sphericalangle CON_2$ . Dacă  $m(\sphericalangle MON_3) = 75^\circ$ , determinați măsura unghiului dintre  $[ON_2$  și semidreapta opusă semidreptei  $[OA$ .
9. Să se afle măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente, știind că raportul dintre suplementul sumei lor și suma suplementelor lor este  $\frac{1}{4}$ .  
(prof. Ștefan Iloaie, G.M. nr. 7/2006)
10. Fie  $O \in (AB)$  și punctele  $C$ ,  $R$ ,  $S$  de aceeași parte a dreptei  $AB$ , astfel încât  $m(\sphericalangle AOC) = 15^\circ$ ,  $m(\sphericalangle ROC)$  este media aritmetică a măsurilor unghiurilor  $\sphericalangle AOC$  și  $\sphericalangle ROS$ , iar măsura unghiului  $\sphericalangle ROS$  este media aritmetică a măsurilor unghiurilor  $\sphericalangle AOC$ ,  $\sphericalangle ROC$ ,  $\sphericalangle SOB$ .  
a) Să se determine  $m(\sphericalangle ROS)$ .  
b) Să se arate că dreptele  $SO$  și  $AB$  sunt perpendiculare.

### Temă:

1. Fie unghiurile adiacente  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOC$ . Bisectoarea unghiului  $\sphericalangle AOB$  formează cu  $(OC$  un unghi cu măsura de  $72^\circ$ , iar bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BOC$  formează cu  $(OA$  un unghi drept. Determinați măsura unghiului  $\sphericalangle AOC$ .  
(Etapa locală, Vrancea, 2010)
2. În jurul punctului  $O$  sunt desenate unghiuri având măsurile în ordinea  $2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, \dots, 16^\circ, 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, \dots, 16^\circ$  și așa mai departe.  
c) Câte unghiuri sunt desenate în jurul punctului  $O$ ?  
d) Notăm  $O_1, O_2, O_3, \dots$  unghiurile determinate anterior în jurul punctului  $O$ . Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor  $\sphericalangle O_6$  și  $\sphericalangle O_{14}$ .  
(Etapa locală, Saru Mare, 2009, prof. Nicolae Baci)
3. Se consideră unghiurile adiacente  $\sphericalangle A_i O A_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , cu interioarele disjuncte având măsurile în grade de  $2^i$ .  
a) Să se afle valoarea maximă a lui  $n$  pentru care suma măsurilor celor  $n$  unghiuri este mai mică decât  $360^\circ$ .

- b) Fie  $(OC)$  semidreapta opusă bisectoarei  $(OB)$  a unghiului  $\angle A_1OA_8$ . Să se afle măsura unghiului  $\angle A_5OC$ .
4. Unghiurile  $\sphericalangle AOC$  și  $\sphericalangle COB$  sunt adiacente suplementare, iar punctele  $C$  și  $D$  sunt de o parte și de cealaltă a dreptei  $AO$ , astfel încât  $m(\sphericalangle COD) = 100^\circ$  și  $m(\sphericalangle BOD) = 3 \cdot m(\sphericalangle AOC) < 180^\circ$ . Aflați:  
a) Măsurile unghiurilor  $\sphericalangle AOC$ ,  $\sphericalangle COB$  și  $\sphericalangle BOD$ . b) Măsura unghiului format de bisectoarea  $\sphericalangle AOD$  și semidreapta opusă semidreptei  $[OC)$ .
5. În jurul punctului  $O$  se consideră unghiurile  $\sphericalangle A_1OA_2$ ,  $\sphericalangle A_2OA_3$ ,  $\sphericalangle A_3OA_4$ ,  $\sphericalangle A_4OA_5$ ,  $\sphericalangle A_5OA_1$ . Se știe că pentru fiecare din unghiurile  $\sphericalangle A_iOA_{i+1}$ ,  $i \in \{2,3,4\}$ , măsura sa este egală cu media aritmetică a măsurilor celor două unghiuri adiacente lui, iar  $[OA_1)$  și  $[OA_4)$  sunt semidrepte opuse. Calculați măsurile celor cinci unghiuri.
6. Se dau unghiurile  $AOB$  și  $BOC$  astfel încât  $m(\sphericalangle AOB) = 3 \cdot m(\sphericalangle BOC)$ . Știind că bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de  $40^\circ$ :  
a) Calculați măsurile unghiurilor  $AOB$ ,  $BOC$  și  $AOC$ .  
b) Dacă  $[OB')$  este semidreapta opusă lui  $[OB)$ , calculați  $m(\sphericalangle AOB')$

(Petre Năchilă, G.M. nr. 11/2008)

7. Două unghiuri suplementare au o latură comună, iar bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de  $60^\circ$ . Determinați măsurile unghiurilor.

(Marin Simion, G.M. nr. 10/2013)

### Bibliografie:

1. Artur Bălăucă – OLIMPIADE, CONCURSURI ȘI CENTRE DE EXCELENȚĂ – clasa a VI-a, Editura TAIDA, Iași, 2012
2. Dan Brânzei (coordonator) – Matematică- olimpiade și concursuri școlare, Editura PARALELA 45, Pitești, 2010
3. Nicolae Grigore, Sorin Ion, Ramona Măinea, Teodora Popa – MATEMATICĂ- OLIMPIADE ȘI CONCURSURI ȘCOLARE – Clasa a VI-a, Editura Nomina, Pitești, 2012
4. Petre Năchilă, Cătălin Eugen Năchilă – EXERCITII ȘI PROBLEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ- clasa a VI-a, Editura Nomina, Pitești, 2011
5. Radu Gologan (coordonator) - OLIMPIADE ȘI CONCURSURI ȘCOLARE- clasele IV-VI, Editura PARALELA 45, Pitești, 2012
6. Tuță Luca- 409 Probleme de matematică –Rezolvări complete, Editura ALL EDUCAȚIONAL, București, 2006
7. Colecția GAZETA MATEMATICĂ
8. [www.olimpiade.ro](http://www.olimpiade.ro)
9. [www.mategl.com](http://www.mategl.com)