Centrul Județean de Excelență la Matematică **Prof. Raluca – Isabella Balcan**
Constanța-2014 **Şcoala Gimnazială nr.24 „Ion Jalea" Constanţa**

LECŢIA 9. CLASA a -V- a

MULȚIMI

CONSIDERAŢII TEORETICE

Creatorul teoriei mulțimilor, matematicianul Cantor, spunea că **o mulțime este o colecție de obiecte de natură oarecare, bine determinate şi distincte, numite elemente ale mulțimii.** Se consideră cunoscute relația de apartenență, relația de incluziune, relația de egalitate, precum și operațiile cu mulțimi reuniunea, intersecția, diferența, produsul cartezian.

Proprietățile operațiilor de reuniune și intersecție:

1) Asociativitatea $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
   $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
2) Comutativitatea $A\cup B=B\cup A$
   $A\cap B=B\cap A$
3) Distributivitatea reuniunii față de intersecție/ a intersecției față de reuniune
   $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
   $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Conform principiului includerii și excluderii avem:

$\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}A+\mathrm{Card}B-\mathrm{Card}(A\cap B)$

$\mathrm{Card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{Card}A+\mathrm{Card}B+\mathrm{Card}C-\mathrm{Card}(A\cap B)-\mathrm{Card}(A\cap C)-\mathrm{Card}(B\cap C)+\mathrm{Card}(A\cap B\cap C)$

ş.a.m.d.

Definiție. Diferența simetrică a două mulțimi A și B, notată „Δ" se definește astfel **$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$**

Definiție. Fie A o mulțime nevidă. Un sistem $A_1, A_2, \dots\dots, A_n$ de submulțimi nevide, disjuncte două câte două, ale mulțimii A astfel încât $A_1\cup A_2\cup\dots\dots\cup A_n=A$ se numește partiție a mulțimii A.

Observație: Numărul de submulțimi ale unei mulțimi finite A este egal cu 2^{CardA} .

PROBLEME PROPUSE

1. Se dă șirul de mulțimi A_1={1}, A_2={2, 3, 4}, A_3={5, 6, 7, 8, 9},…
   a) Scrieți elementele mulțimii A_4
   b) Determinați mulțimea ce conține numărul natural 2014
   c) Determinați cel mai mic și respectiv cel mai mare element al mulțimii A_{2014}.

2. Spunem că o mulţime A de numere naturale nenule este ***încifrată*** dacă pentru orice două elemente $a, b \in A$, suma cifrelor lui a divide suma cifrelor lui b sau invers. Dacă un număr este scris cu o singură cifră se consideră că suma cifrelor lui este acea cifră.
   a) Arătaţi că mulţimea $A = \{10, 14, 23, 28\}$ este ***încifrată***.
   b) Construiţi o mulţime ***încifrată*** cu 11 elemente.
   c) Determinaţi numărul maxim de elemente al unei submulţimi ***încifrate*** a mulţimii $\{1, 2, 3, \dots 100\}$.

(Nicolae Coculescu, Slatina, 2010)

3. Se consideră mulțimile B={1, 3, 5, 7, 9, 11,...2009, 2011}, C={1, 2, 5, 6, 9, 10,...2009, 2010} și se notează cu A intersecția lor.
   a) Determinați elementele mulțimii A.
   b) Aflați cardinalul mulțimii A.
   c) Arătați că orice submulțime a mulțimii A, formată din 253 de elemente, conține două elemente a căror sumă este 2014.

(Dimitrie Pompeiu, Botoșani, 2011)

4. Fiind date mulțimile A=$\left\{a^{b^c} | a, b, c \in \{1,2,3\}\right\}$ și B=$\left\{(a^b)^c | a, b, c \in \{1,2,3\}\right\}$ calculați Card(AΔB).
5. Se dau mulțimile A=$\{n^2 + n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și B=$\{5k^2 - 1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Arătați că A∩B=∅.
6. Mulțimile A și B au același număr de elemente și sunt formate din numere naturale consecutive. Aflați cele două mulțimi știind că A∩B={16} și suma elementelor celor două mulțimi este 160.
7. La Jocurile Olimpice de Iarnă-Soci 2014, România participă cu o echipă de 25 de sportivi care vor concura la probele de biatlon, patinaj viteză și schi fond. Determinați câți sportivi din echipa României participă la toate cele trei probe sportive, dacă se știe că 5 sportivi nu participă nici la biatlon, nici la patinaj viteză, 3 sportivi nu participă nici la patinaj viteză, nici la schi fond, 4 sportivi nu participă nici la proba de schi fond, nici la proba de biatlon și câte 5 sportivi participă la cel puțin câte două din cele trei probe.

(OLM, Caraș Severin, 2014)

8. Se consideră mulțimile A=$\{x \in \mathbb{N} | x \leq 2^m\}$ și B=$\{y \in \mathbb{N} | 2^m \leq y \leq 2^{2008}\}$, unde $m \in \mathbb{N}$.
   a) Pentru m=101 cercetați dacă suma elementelor mulțimii A este pătrat perfect.
   b) Determinați numărul m astfel încât cardA=cardB.
9. Se dă mulțimea M=$\{x \in \mathbb{N} | 2^n < x < 2^{n+3},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 9\}$.
   a) Arătați că 2013$\cdot 2^{n-9}$ este element al lui M
   b) Dacă n=2013, calculați cardM.
10. Fie A=$\{2k + 1 \mid k \in \{0, 1, 2, \dots 168\}\}$.
   a) Calculați suma elementelor mulțimii A
   b) Există 13 submulțimi ale mulțimii A, disjuncte două câte două, astfel încât fiecare submulțime să conțină 13 elemente și suma unor elemente din submulțime să fie egală cu suma celorlalte elemente din submulțime?

11. Fie A mulțimea numerelor naturale de trei cifre care împărțite la 5 dau restul 1 și împărțite la 9 dau restul 2.
    a) Să se determine cel mai mic și cel mai mare element din mulțimea A.
    b) Să se calculeze suma elementelor mulțimii A.
    c) Să se arate că există cinci mulțimi disjuncte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 astfel încât $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$=A și $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5$, unde S_k este suma elementelor mulțimii A_k, k$\in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(OJM, Brăila, 2009)

12. Se consideră mulțimea A=$\{1, 3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{2014}\}$. Spunem că se realizează o ***partiție*** a lui A dacă mulțimea A este scrisă ca o reuniune de submulțimi nevide ale sale, disjuncte două câte două.
    a) Demonstrați că nu există o partiție a lui A astfel încât produsul elementelor fiecărei submulțimi din partiție să fie pătrat perfect.
    b) Demonstrați că există o partiție a lui A astfel încât suma elementelor fiecărei submulțimi din partiție să fie pătrat perfect.

(OJM, 2014)

13. Împărțim mulțimea A={1, 2, 3, ...19} în două submulțimi nevide M și N astfel încât:
    i) M∩N=∅ și M∪N=A
    ii) suma m a elementelor lui M este mai mare sau egală decât suma n a elementelor lui N
    iii)pentru orice x∈ M avem x+10∈M sau x−10 ∈M.
    Determinați cea mai mică valoare pe care o poate lua diferența m−n.

(ONM, 2011)

TEMĂ

1. Determinați mulțimea M=$\{\overline{abc} \mid a \cdot \overline{bc}, b \cdot \overline{ac}$ sunt numere consecutive $\}$

(GMB 3/2013)

2. Determinați numărul submulțimilor mulțimii A=$\{1, 2, 3, 4, \dots 70, 71\}$ care au suma elementelor egală cu 2549.
3. Fie A o mulțime de numere naturale cu proprietățile:
    a) 80∈A
    b) Dacă 7x+3∈A, atunci x∈A
    c) Dacă x∈A, atunci {7x+4, 7x+5}⊂A.
    Arătați că 4001 și 4002 sunt elemente ale lui A.

(OLM, Buzău, 2011)

4. Aflați elementele mulțimilor A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
    a) A∪B=$\{x \in \mathbb{N} \mid x$ este cifră a sistemului zecimal$\}$
    b) A∩B=$\{x \in \mathbb{N} \mid x$ este ultima cifră a lui 7^n, cu n număr natural$\}$

c) A și B au același număr de elemente

d) Suma elementelor mulțimii A este mai mare decât suma elementelor mulțimii B

e) B\A ={5}.

(OLM, Bacău, 2014)

5. Se consideră A= $\{(n-m)(n+m) | n, m \in \mathbb{N}^*, n > m\}$ şi B= $\{2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Determinaţi mulţimea A∩B.

(GMB 1/2014)

6. Să se demonstreze că oricum am alege 421 numere naturale formate din trei cifre nenule și distincte, există șase, astfel încât suma a trei dintre ele să fie egală cu suma celorlalte trei.

7. Fie mulțimile A=$\{2^0; 2^0+2^1; 2^0+2^1+2^2; 2^0+2^1+2^2+2^3; \ldots\}$ și B=$\{3^0; 3^0+3^1; 3^0+3^1+3^2; 3^0+3^1+3^2+3^3; \ldots\}$. Determinați A⋂B.

Bibliografie:

[1] Maranda Linț, Dorin Linț, Rozalia Marinescu, Dan Ștefan Marinescu – Matematică de excelență pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență, Editura Paralela 45, 2013

[2] Gheorghe Căiniceanu – Matematică olimpiade și concursuri, clasele IV – VI, Editura Paralela 45, 2014

[3] Radu Gologan – Olimpiade şi concursuri şcolare 2011, clasele IV-VI, Editura Paralela 45, 2011

[4] Artur Bălăucă - 1300 de probleme semnificative, Olimpiade, Concursuri si Centre de Excelenţă, clasa a V a, Editura Taida, Iaşi, 2012

[5] Colecţia Gazeta Matematică Bucureşti, 2013-2014

[6] Colecţia Revista de Matematică şi Informatică, Constanţa, 2008-2013

Balcan Raluca Isabella
Şcoala Gimnazială nr.24 „Ion Jalea",
Constanţa, România
E-mail: ralucabalcan@yahoo.com