LECȚIA 4 – *Divizibilitatea numerelor naturale*

8 noi. 2014

Prof. Gheorghe Marian

A) Exerciții și observații pregătitoare, completări

a)

- *Produsul a două numere consecutive este un număr* par sau impar ?
- *Suma a două numere consecutive este un număr* par sau impar ?
- *Suma a 2014 numere naturale consecutive este un număr par sau impar ?*

1. Demonstrați că nu există numere naturale x, y, z **pentru care** $x+3y+5z=2014$ **și** $x^2+y^2+3z^2=2015$.

(*GMB-adaptare*)

b)

- ***Criteriul de divizibilitate cu 3 și cu 9 :*** $3/\overline{abcde\ldots} \Leftrightarrow 3/(a+b+c+d+e+\ldots)$. ***Idem pentru 9***
- ***Criteriul de divizibilitate cu 4=2²:*** $4/\overline{\ldots xyz} \Leftrightarrow 4/\overline{yz}$
- ***Criteriul de divizibilitate cu 25=5²:*** $25/\overline{\ldots xyz} \Leftrightarrow \overline{yz} \in \{00,25,50.75\}$
- ***Criteriul de divizibilitate cu 8=2³:*** $8/\overline{\ldots xyzt} \Leftrightarrow 8/\overline{yzt}$
- ***Criteriul de divizibilitate cu 125 :*** $125/\overline{\ldots xyzt} \Leftrightarrow \overline{yzt} \in \{000,125,250,375,500,625,750,875\}$

c)

Alte proprietăți ale divizibilității :

P1 a/b ***și*** $b/a \Rightarrow a=b$ *(antisimetrie)*

P2 $a/1 \Rightarrow a=1$

P3 $c \vdots b$ ***și*** $b \vdots a \Rightarrow c \vdots a$ *(tranzitivitate)*

(Un nr. natural care se divide cu un alt nr. natural se divide și cu toți divizorii(proprii) acestuia)

P4 $a/b \Rightarrow a/b\cdot k, \forall k \in \mathbf{N}$

P5 a/b ***și*** $a/c \Rightarrow a/(b\pm c)$, *b>c*

P6 $a/b \Rightarrow ac/bc, \forall c \in \mathbf{N}$

P7 $ac/bc, c\neq 0 \Rightarrow a/b$

P8 $a/b\cdot c$ ***și*** $a \nmid b \Rightarrow a/c,\ \forall a,b,c \in \mathbf{N}$

P9 $a/b, a/c \Rightarrow a/(bp+cq), \forall p,q \in \mathbf{N}$

P10 $(a+b)^n = M_a + b^n$

d)

Descompunerea unui număr natural în produs de puteri de numere prime (în factori primi), numere prime, algoritmul lui Euclid

Exemplu : 1260 $=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$

2. Aflați cel mai mic număr natural x **pentru care** $1260\cdot x = A^3$, $A \in \mathbf{N}^*$ **.**

(O.J. Constanța, 1997)

3. Dacă a, b, c sunt numere naturale consecutive, demonstrați că $\overline{abcabc} \vdots 231$

(vezi și *ex. 98, 101, pag. 73*101 / pag. 73 – A. Bălăucă)

e)

Numărul de divizori ai unui număr natural :

Dacă descompunerea în factori primi a numărului natural n este

$$n = a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2} \cdot a_3^{x_3} \cdot \ldots \cdot a_k^{x_k} \quad \Rightarrow \quad \overline{\overline{D_n}} = (x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot(x_3+1)\cdot\ldots\cdot(x_k+1),$$

unde cu $\overline{\overline{D_n}}$ ***sau card*** D_n ***notăm numărul divizorilor numărului n .***

4. Se consideră numerele $A=\overline{aaa}$ **şi** $B=\overline{aaaa}$ **, unde** a **este o cifră nenulă . Arătaţi că numărul de divizori al lui** A **este cel mult egal cu numărul de divizori al lui** B **.**

(*GMB nr. 2/2014*)

f)

- ***Orice număr natural este ori par ori impar***
- ***Orice număr natural este de forma 3k sau 3k+1 sau 3k+2***
- ***Orice număr natural este de forma 4k sau 4k+1 sau 4k+2 sau 4k+3***
- ***etc.***

Exerciţiu rezolvat

5. Arătaţi că pentru orice n **, număr natural impar, numărul** $A=2^n+3^n+7^n+8^n$ **este multiplu de 5.**

(*GMB nr. 4/2013*)

Soluţie : $\forall n \in \mathrm{N}, n=4k$ *sau* $n=4k+1$ *sau* $n=4k+2$ *sau* $n=4k+3$. *Dacă, în plus, n – impar* $\Rightarrow n=4k+1$ *sau* $n=4k+3$.

I) $n=4k+1 \Rightarrow U(2^{4k+1})=U(2^1)=2, U(3^{4k+1})=3, U(7^{4k+1})=7, U(8^{4k+1})=8$, *deci* $U(A)=U(2+3+7+8)=0 \Rightarrow A\in M_5$.

II) $n=4k+3 \Rightarrow U(2^{4k+3})=U(2^3)=8, U(3^{4k+3})=7, U(7^{4k+3})=3, U(8^{4k+3})=2$, *deci* $U(A)=U(8+7+3+2)=0 \Rightarrow A\in M_5$. **Obs.** $A \vdots 10$ **!**

B)

6. Fie mulţimea $A=\{(x;y)/5x+7y=2275, y\in \mathrm{N}\}$**. Câte elemente are mulţimea** A**?**

(*RMI*)

7. Se dă şirul : 1, 9, 35, 91, 189, 341, 559, 855, ... Arătaţi că al 2013-lea termen al şirului este divizibil cu 5 .

(*Variantă : Aceeaşi cerinţă pentru al* 2014-*lea termen al şirului :* 1,5,13,25,41,61,85, 113,...*)*

(*GMB nr. 11/2008-adaptare*)

8. Se consideră mulţimile : $M_1=\{1\}, M_2=\{1;3\}, M_3=\{1;3;7\}, M_4=\{1;3;7;15\}, M_5=\{1;3;7;15;31\}, \ldots$

a) Sunt 2014 şi 2047 elemente ale uneia din aceste mulţimi ? Dacă da, în care ? Justificaţi .

b) Câte elemente sunt multipli ai lui 5 în primele 2015 mulţimi ?

9. Fie n, $n+2$, $n+6$ **trei numere naturale şi** S **suma lor .**

a) Daţi exemple de cel puţin trei valori pentru $n\in \mathbf{N}$**, astfel încât numerele** n, $n+2$, $n+6$ **să fie simultan numere prime .**

b) Dacă n, $n+2$, $n+6$ **sunt simultan numere prime, arătaţi că există** $k\in\mathbf{N}$**, astfel încât** $S=9k+5$**.**

c) Dacă n, $n+2$, $n+6$ **sunt simultan numere prime, determinaţi restul împărţirii lui** S **la 18.**

10. Pentru fiecare număr natural n **, notăm cu** $s(n)$ **suma cifrelor sale . Fie** a **un număr natural cu 2014 cifre, care este divizibil cu 9 . Arătaţi că numărul** $s(s(s(a)))$ **este pătrat perfect .**

(*GMB*)

11. Determinaţi numerele de forma $\overline{abc}$ **care se divid cu 17, ştiind că** $12a-6b+c$ **se divide cu 17 .**

12. Determinaţi numerele prime a,b,c **ştiind că** $15a+33b+407c=2013$ **.**

(*GMB nr. 9/2012, cl. a VI-a*)

13. Fie numărul $N=\overline{aaabbb}$.

a. Arătaţi că N se divide cu $\overline{a00b}$.

b. Dacă $a=b$, arătaţi că N se divide cu 7, 11 şi 13 .

(*Supliment GMB nr. 3/2013*)

14. Determinaţi numerele prime p , pentru care $p+2$, p^2+4 , p^3+2 şi p^4-2 sunt simultan numere prime .

(*GMB nr. 4/2013*)

(vezi şi probl. 4, 5, 13 / pag. 75 – A. Bălăucă)

C) ***Exerciţii suplimentare***

1. Determinaţi numerele naturale n pentru care $\dfrac{6^n+7^n+8^n}{3^n+4^n+5^n}$ este număr natural .

(*GMB nr. 6-7-8/2012*)

2. Să se arate că numărul $A=7^0+7^1+7^2+\ldots+7^{2015}$ este divizibil cu 400 .

(*RMI nr. 1/ 2013-adaptare*)

3. Arătaţi că numărul $A=63^n+7^{n+1}\cdot 3^{2n+1}-21^n\cdot 3^{n+2}$ este divizibil cu 819, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(*GMB nr. 12/2012*)

4. Considerăm numerele naturale nenule, mai mici sau egale cu 2012 şi care nu se divid cu 3 . Câte pătrate perfecte avem ?

(*GMB nr. 6-7-8/2012*)

5. Arătaţi că numărul $10^{20}+3\cdot 10^{10}-1$ nu este pătrat perfect .

(*GMB nr. 10/2011*)

6. Arătaţi că numărul $A=1^p+2^p+\ldots+2015^p$ este divizibil cu 5 , unde p este un număr natural prim impar .

(*GMB nr. 11/2013 - adaptare*)

D) ***Recomandări***

- ***Exerciţii suplimentare pentru aplicarea proprietăţii :*** $(a+b)^n=M_a+b^n$

1. **Arătaţi că numărul 2014^n-1 este divizibil cu 2015 , dacă n este par şi numărul 2014^n+1 este divizibil cu 2015 , dacă n este impar .**
2. **Arătaţi că numărul $a=61+2^{2015}$ este multiplu al lui 31 .**
3. **Demonstraţi că 31 divide numărul $2^{2014}+2^{2013}+2^{2012}+2^{2011}+1$.**

(*GMB nr. 4/2014*)

- ***Problemele 1 şi 3 date la Olimpiada Naţională din 6.11.04, GMB nr. 6-7-8 / 2014, pag. 294-299***

BIBLIOGRAFIE :

- ***Colecţia GMB***, 2010-2014
- ***Colecţia RMI Constanţa***, 2012-2014
- ***Artur Bălăucă*** – Olimpiade, concursuri şi centre de excelenţă . clasa aV-a

E)

Temă

1. **Fie numărul** $n = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{2014 cifre} + 2014$ **.**

   a) **Arătaţi că numărul** n **este divizibil cu 10 .**
   b) **Aflaţi câtul şi restul împărţirii lui** n **la 111 .**

2. **Fie** $a,b \in \mathbf{N}^*$ **. Demonstraţi că** $15 / 12a + 11b$ **dacă şi numai dacă** $15 / 2013a + 2014b$ **.**

3. **Din produsul tuturor numerelor de la 1 la 2013 se exclud toate numerele care se divid cu 5 . Cu ce cifră se termină produsul numerelor rămase ?**

4. **Fie** A **un număr natural care nu se divide cu 5 şi** B **câtul împărţirii lui** A **la 5 . Arătaţi că dacă** $u(A) < 5$**, atunci** B **este un număr par, iar dacă** $u(A) > 5$**, atunci** B **este un număr impar .**

(*GMB nr. 10/2014*)

5. **Arătaţi că nu există numere naturale prime** a,b,c **astfel încât** $3a + 7b + 9c = 46$ **.**

6. **Arătaţi că oricum am alege două elemente ale mulţimii** $A = \{1,3,5,\ldots,2011\}$**, suma sau diferenţa acestora este multiplu de 4 .**

(vezi şi 112 b)/ pag. 73 – A. Bălăucă)

7. **Determinaţi numerele naturale de trei cifre în baza zece, ştiind că ele şi răsturnatele lor se divid cu 17 .**