Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a XII-a, Etapa I, 29 noiembrie 2014

Clasa a V-a

I. Calculați:

(3p) **a)** $89\cdot 98+98\cdot 87-176\cdot 87$

(3p) **b)** $(289\cdot 81):(17\cdot 27)$

(3p) **c)** $(1+2+3+...+90):(1+2+3+...+14)$

II. Se consideră şirul:

2014, 2007, 2000, 1993, …

având un număr maxim cu termeni numere naturale.

(3p) **a)** Care este numărul de termeni ai acestui şir?

(3p) **b)** Câți termeni de două cifre avem?

(3p) **c)** Câți termeni au ultima cifră 3?

prof. Marin Goşoniu, prof. Traian Preda

III. Să se arate că:

(3p) **a)** $55+33^2=1144$

(6p) **b)** $\underbrace{55...55}_{2014}+\underbrace{33...33}_{2014}{}^2=\underbrace{11...11}_{2014}\underbrace{44...44}_{2014}$

prof. Marin Goşoniu

IV. Să se ordoneze crescător următoarele puteri:

(9p) 2^{240}; 3^{143}; 5^{95}; 29^{48}

prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă şi cu explicații clare.

Timp de lucru: **2 ore şi 30 minute.**

Concursul Naţional de Matematică “Arhimede”
Ediţia a XII-a, Etapa I, 29 noiembrie 2014

Clasa a VI-a

I. Fie $n = \overline{ab} + \overline{abb} + \overline{abba} - \overline{abab}$

(3p) **a)** Pentru $a = 1$ şi $b = 9$, arătați că numărul n se poate scrie ca un produs de trei numere prime.

(3p) **b)** Dacă cifra a este număr prim şi $b = a^2$, arătați că numărul n nu poate fi impar.

(3p) **c)** Câte numere n sunt divizibile cu 3?

prof. Cristina Godeanu-Matei

II. Fie m număr natural.

(3p) **a)** Dacă m şi $7m + 1$ nu se divid cu 3, atunci $8m + 1$ se divide cu 3.

(3p) **b)** Dacă m şi $7m + 2$ nu se divid cu 3, atunci $8m - 1$ se divide cu 3.

(3p) **c)** Să se afle ultimele 2 cifre ale numărului.

$$n = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + ... + 2^{2012} + 2^{2014}$$

Prof. N. M. Go□oniu, prof. Ion Burcă

III. *(9p)* Să se determine numerele naturale n și p ştiind că descompunerea în factori primi a numărului A este: $A = p\left(p + 3^n\right)\left(p + 3^{n+1}\right)\left(p + 3^{n+2}\right)\left(p + 3^{n+3}\right)$

prof. Ion Neață, Slatina

IV. Pe o dreaptă se consideră punctele $0, A_2, A_3, ..., A_{100}$ astfel încât $0A_i = i$, pentru orice $i = 2,3,...,100$. Colorăm punctele $A_2, A_3, ..., A_{99}, A_{100}$ după următoarea regulă: dacă A_n are o anumită culoare, atunci orice punct A_d, cu d divide pe n, va avea aceeaşi culoare cu A_n.

(3p) **a)** Să se arate că A_4 şi A_{25} au aceeaşi culoare.

(3p) **b)** Câte culori sunt necesare pentru a putea colora toate punctele?

(3p) **c)** Să se afle câte segmente au capetele de culori diferite?

prof. Cristian Olteanu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă şi cu explicații clare.

Timp de lucru: **2 ore şi 30 minute.**

Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a XII-a, Etapa I, 29 noiembrie 2014

Clasa a VII-a

I. *(4p)* **a)** Arătați că:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}<\frac{5}{9}$$

(5p) **b)** Determinați numărul natural $n \in N^*$ pentru care suma:

$$\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+...+\frac{3}{(3n-1)(3n+2)} \text{ este egală cu } \frac{15}{32}.$$

prof. Cristina Godeanu-Matei

II. *(4p)* **a)** Ştiind că:

$$\frac{2a+3}{b+c}+\frac{2b+3}{c+a}+\frac{2c+3}{a+b}=2$$

unde *a, b, c* sunt numere raționale pozitive, arătați că valoarea expresiei

$$E=\frac{a(2a+3)}{b+c}+\frac{b(2b+3)}{c+a}+\frac{c(2c+3)}{a+b}$$

este un număr întreg divizibil cu 3.

(5p) **b)** Fie $a,b,x,y \in N^*$. Să se demonstreze echivalența propozițiilor:

(p$_1$): $\dfrac{(a;b)}{b}+\dfrac{[a;b]}{a}=\dfrac{(a;b)}{a}+\dfrac{[a;b]}{b}$ şi

(p$_2$): $\dfrac{(x+1)a+yb}{xa+(y+1)b}\in N$ (am notat cu *(a;b)* – c.m.m.d.c. şi *[a;b]* – c.m.m.m.c. al numerelor *a* şi *b*).

prof. Ion Neață, Slatina

III. Fie ABCD un patrulater convex în care $AO \equiv OC$ (am notat $AC \cap BD = \{0\}$). Să se demonstreze că pătrulaterul ABCD este paralelogram sau patrulater ortodiagonal $(AC \perp BD)$, în fiecare din situațiile:

(4p) **a)** $m(\angle A)=m(\angle C)=90^\circ$

(5p) **b)** $m(\angle A)=m(\angle C)$

prof. Traian Preda

IV. *(9p)* Fie patrulaterul convex $ABCD$, $AC \cap BD=\{E\}$, $[AC]\equiv[DE]$, $m(\angle AEB)=60^\circ$. Să se arate că triunghiul ABE este echilateral dacă $[CB]\equiv[CD]$

prof. Ion Neață, Slatina

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă şi cu explicații clare.

Timp de lucru: **3 ore.**

Concursul Naţional de Matematică “Arhimede”
Ediţia a XII-a, Etapa I, 29 noiembrie 2014

Clasa a VIII-a

I. *(3p)* **a)** Să se arate că:

$$10^2-9^2+8^2-7^2+6^2-5^2+4^2-3^2+2^2-1=10+9+8+...+3+2+1$$

(3p) **b)** Să se calculeze:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+...+2013^2-2014^2$$

(3p) **c)** Arătați că numărul 2014^5+2015 nu este prim.

prof. Marin Goşoniu

II. Se consideră mulțimile:

$$A_a=\left\{\sqrt{n^2+n+a}\mid n\in N\right\}\cap N$$, unde a este un număr natural nenul.

(3p) **a)** Demonstrați că $A_a\neq\emptyset$, $(\forall)a\in N^*$.

(3p) **b)** Determinați A_{37}

(3p) **c)** Demonstrați că pentru orice $m\in N^*$ există $a\in N$ astfel încât $card\ A_a=m$

prof. Traian Preda

III. *(9p)* Fie pătratul *ABCD*, punctul *E* – mijlocul lui *[AD],* punctul $F\in(AB)$. Dacă distanța de la *E* la dreapta *FC* este egală cu $\frac{AB}{2}$, atunci $AB=4AF$.

prof. Ion Neață, Slatina

IV. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub şi G_1,G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor $DB'D'$ şi respectiv DBC. Demonstrați că:

(3p) **a)** $G_1G_2\parallel(DCC')$

(3p) **b)** Punctele A, G_1, M' sunt colineare, unde M' este mijlocul muchiei $C'D'$.

(3p) **c)** $AG_1\perp DG_2$.

prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă şi cu explicații clare.

Timp de lucru: **3 ore.**