# Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
# Ediţia a XII-a, Etapa I, 29 noiembrie 2014

## Clasa a IX-a

**I.** Fie $x$ un număr întreg şi

$$y=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)-1$$

*(5p)* **a)** Să se arate că $y$ este produsul a două numere consecutive.

*(4p)* **b)** Să se determine toate numerele întregi $x$ pentru care $y$ este pătrat perfect.

**II.** *(9p)* Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

**a)** Toate perimetrele triunghiurilor $ABC$, $ABD$, $BCD$, $ACD$ sunt egale.

**b)** Patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi.

*prof. Gheorghe Stoica*

**III.** *(9p)* Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale. Considerăm şirurile:

$$x_n=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2,\ n\geq 1 \text{ şi}$$

$$y_n=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}-\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|,\ n\geq 1$$

Să se arate că şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt crescătoare.

*Sorin Rădulescu, Marius Rădulescu*

**IV.** Să se demonstreze următoarele inegalități:

*(3p)* **a)** $\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ca},\quad a,b,c>0$

*(3p)* **b)** $\dfrac{ab^2}{c}+\dfrac{bc^2}{a}+\dfrac{ca^2}{b}\geq ab+bc+ca,\quad a,b,c>0$

*(3p)* **c)**. $(a+b+c)\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\right)\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right),\ a,b,c>0$

***Notă.*** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă şi cu explicații clare.

*Timp de lucru:* **3 ore.**

# Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
# Ediţia a XII-a, Etapa I, 29 noiembrie 2014

## Clasa a X-a

**I.** *(3p)* **a)** Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1$$

*(3p)* **b)** Să se ordoneze crescător numerele:

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{5}$$

*(3p)* **c)** Să se demonstreze că numărul

$\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ este irațional

**II.** Fie $f,g:R_+\to R_+$ două funcții definite astfel:

$$f(x)=x+\sqrt{x},\ x\in R_+$$

$$g(x)=\frac{1+2x-\sqrt{1+4x}}{2},\ x\in R_+$$

*(5p)* **a)** Să se calculeze $f\circ g$ şi $g\circ f$

*(4p)* **b)** Să se arate că funcțiile f şi g sunt bijective şi se se calculeze inversele lor.

**III.** *(9p)* Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale. Se consideră şirurile:

$$x_n=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\ n\geq 1$$

$$y_n=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}+\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\ n\geq 1$$

Să se demonstreze că şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt crescătoare.

*Sorin Rădulescu, Marius Rădulescu*

**IV.** *(9p)* Notăm

$$a=\sqrt[3]{19+\sqrt{486}}+\sqrt[3]{19-\sqrt{486}}$$

Să se calculeze:

a) $x=a^3+b^3$

b) $y=ab$

c) $z=a+b$

*Aurel Doboşan*

***Notă.*** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă şi cu explicații clare.

*Timp de lucru:* **3 ore.**

# Concursul Naţional de Matematică “Arhimede”
# Ediţia a XII-a, Etapa I, 29 noiembrie 2014

## Clasa a XI-a

**I.** Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ care satisface relațiile: $x_1 = 2$; $x_{x+1} = 2x_n - 1$, $n \geq 1$. Fie $a_n = \log_2(x_n - 1)$, $n \geq 1$.

*(3p)* **a)** Să se calculeze: $x_2$, $x_3$, $x_4$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$.

*(3p)* **b)** Să se calculeze: $a_{n+1} - a_n$, $n \geq 1$.

*(3p)* **c)** Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ şi să se arate că $x_n = 2^{n-1} + 1$, $n \geq 1$.

**II.** *(9p)* Fie $A, B \in M_2(Z)$ cu $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$ şi $[Tr(B)] \cdot A + [Tr(A)] \cdot B = AB - I_2$.

Să se demonstreze că $\det(AB)$ este pătratul unui număr întreg.

*prof.Marius Drăgan*

**III.** Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale care satisface relațiile: $x_1 = a$; $x_2 = b$ şi $x_{n+1} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, $n \geq 2$.

*(3p)* **a)** Să se calculeze în funcție de a şi b termenii $x_3$, $x_4$ şi $x_5$.

*(3p)* **b)** Ce condiții trebuie să îndeplinească a şi b astfel încât şirul $(x_n)$ să fie monoton?

*(3p)* **c)** Să se demonstreze că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**IV.** *(9p)* Fie $n \geq 3$ un număr natural. Să se determine cel mai mare număr natural k cu proprietatea că există $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k \in S_n$ transpoziţii distincte în fiecare din cazurile:

**a)** $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ oricare ar fi $i, j \in \{1,2,...,k\}$

**b)** $\sigma_i \sigma_j \neq \sigma_j \sigma_i$ oricare ar fi $i, j \in \{1,2,...,k\}$

*Sorin Rădulescu, Marius Rădulescu*

***Notă.*** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă şi cu explicații clare.

*Timp de lucru:* **3 ore.**

# Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
# Ediţia a XII-a, Etapa I, 29 noiembrie 2014

## Clasa a XII-a

**I.** Să se calculeze următoarele integrale nedefinite:

*(4p)* **a)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, $x \in [0,\infty)$

*(5p)* **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2+x}+\sqrt[3]{x^2}}$, $x \in R$

**II.** Să se calculeze:

*(3p)* **a)** $\left(\hat{7}\right)^{100}$ în $Z_8$;

*(3p)* **b)** $\left(\hat{7}\right)^{100}$ în $Z_9$;

*(3p)* **c)** $\hat{1}+\hat{7}+\left(\hat{7}\right)^2+...+\left(\hat{7}\right)^{100}$ în $Z_8$.

**III.** *(9p)* Să se determine toate funcţiile $f: R \to R$ care admit primitive şi care verifică relaţia

$$f(x+2y)+f(x-2y)=2f(x)+8f(y),\ x,y \in R$$

*Sorin Rădulescu, Marius Rădulescu*

**IV.** *(9p)* Fie $n \geq 2$ un număr natural care nu este multiplu de 5. Să se demonstreze că:

**a)** $x^{10}=\hat{1}$, pentru orice $x \in Z_{11} \setminus \{\hat{0}\}$

**b)** Dacă $x, y \in Z_{11}$ şi $x^n = y^n$ atunci $x^2 = y^2$.

*prof. Gheorghe Stoica*

***Notă.*** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă şi cu explicaţii clare.

*Timp de lucru:* **3 ore.**