Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a IX - a, Bistriţa
21 - 23 noiembrie 2014

Barem de corectură şi notare

Clasa a XII -a

Subiectul I.

Să se determine funcţiile derivabile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea că funcţia $f + 3g$ este o primitvă a funcţiei $2f - g$ şi funcţia $5f - 6g$ este o primitivă a funcţiei $10f + 2g$.

Soluţie:

Trebuie să avem:

$(f + 3g)' = 2f - g$

$(5f - 6g)' = 10f + 2g$ 0,5p

sau

$f' + 3g' = 2f - g$ (1)

$5f' - 6g' = 10f + 2g$ (2) 0,5p

Înmulţim (1) cu 2 şi adunăm rezultatul obţinut la (2);

Rezultă că: $7f' = 14f$ 1p

de unde $\dfrac{f'}{f} = 2$, adică $\ln \mid f \mid = 2x + \ln c_1$

de unde $\mid f(x) \mid = c_1 e^{2x},\ c_1 \in \mathbb{R}_+$ 1p

În mod analog, dacă înmulţim (1) cu -5 şi adunăm la (2), rezultă

$-21y' = 7y$ 1p

de unde $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{3}$,

adică $\ln \mid g(x) \mid = -\frac{x}{3} + \ln c_2$,

de unde $\mid g(x) \mid = c_2 e^{-\frac{x}{3}},\ c_2 \in \mathbb{R}_+$ 1p

Avem soluţiile:

$f(x) = \pm c_1 e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \pm c_2 e^{-\frac{x}{3}},\ x \in \mathbb{R}$ 1p

Nu putem avea

$$f(x) = \begin{cases} c_1 e^{2x},\ x \leq x_0 \\ -c_1 e^{2x},\ x > x_0 \end{cases},\ x_0 \in \mathbb{R}$$

deoarece din continuitatea lui f ar rezulta $c_1 = 0$ 1p

Analog pentru g.

Subiectul II.

Să se determine primitivele funcţiei

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x+x^2+...+x^7)+\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{4x^4}{1+x^4}.$$

Soluţie:

Avem:

$1+x+x^2+...+x^7=(1+x)(1+x^2)(1+x^4),\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$ 2,5p

Pentru $x>0$ avem

$\ln(1+x+...+x^7)=\ln(1+x)+ln(1+x^2)+ln(1+x^4)$ 1p

Atunci

$$(1)\quad \int f(x)dx=\int\ln(1+x)dx+\int\ln(1+x^2)dx+\int\ln(1+x^4)dx+ \\ +\int\frac{x}{1+x}dx+2\int\frac{x^2}{1+x^2}dx+4\int\frac{x^4}{1+x^4}dx$$ 1p

Utilizând integrarea prin părţi, putem scrie:

$\int\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)-\int\frac{x}{1+x}dx$ 0,5p

$\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$ 0,5p

$\int\ln(1+x^4)dx=x\ln(1+x^4)-4\int\frac{x^4}{1+x^4}dx$ 0,5p

Înlocuind în (1), obţinem:

$\int f(x)dx=x\big[\ln(1+x)+ln(1+x^2)+\ln(1+x^4)\big]+\mathcal{C}=x\ln(1+x+x^2+...+x^7)+\mathcal{C}$ 1p

Subiectul III.

Se consideră matricea $A\in M_2(\mathbb{C})$ cu $\det A=1$. Să se arate că:

$$\det(A^2+I_2)+det(A^2+2A-I_2)=8$$

Soluţie:

Fie $P_A(x)=\det(A-xI_2)=x^2-tx+1,\ t=trA$ (urma matricei A) polinomul caracterisitic al matricei A 1p

Avem:

$\det(A^2+I_2)=\det(A+iI_2)\cdot\det(A-iI_2)=P_A(i)\cdot P_A(-i)=t^2$ 2p

$\det(A^2+2A-I_2)=\det((A+I_2)^2-2I_2)=\det(A+(1-\sqrt{2})I_2)\cdot(\det(A+(1+\sqrt{2})I_2)=$

$=P_A(-1+\sqrt{2})\cdot P_A(-1-\sqrt{2})$ 2p

$P_A(-1+\sqrt{2})\cdot P_A(-1-\sqrt{2})=(t+4)^2-2(t+2)^2$ 1p

În final:

$\det(A^2+I_2)+\det(A^2+2A-I_2)=t^2+(t+4)^2-2(t+2)^2=8$ 1p