Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a IX - a, Bistriţa
21 - 23 noiembrie 2014

Clasa a XI -a

Subiectul I.

Să se determine numerele reale $x,\ y,\ z,\ t$ pentru care

$$2t+t^2x=x,\ 2x+x^2y=y,\ 2y+y^2z=z,\ 2z+z^2t=t.$$

Subiectul II.

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $A^n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se determine $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos(n\alpha) & \sin(n\beta)\\ -\sin(n\beta) & \cos(n\alpha)\end{pmatrix}$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul III.

Considerăm următoarele $k,\ k\geq 3$, şiruri $(x_{1,n}),\ (x_{2,n}),\ \ldots,(x_{k,n})$ care au termenii iniţiali pozitivi, iar pentru $n\geq 1$ avem:

$$x_{1,n+1}=x_{2,n}+\frac{1}{x_{3,n}},\ x_{2,n+1}=x_{3,n}+\frac{1}{x_{4,n}},$$
$$\vdots$$
$$x_{k-2,n+1}=x_{k-1,n}+\frac{1}{x_{k,n}},\ x_{k-1,n+1}=x_{k,n}+\frac{1}{x_{1,n}},\ x_{k,n+1}=x_{1,n}+\frac{1}{x_{2,n}}$$

Arătaţi că:

a) nici unul dintre şiruri nu este mărginit;

b) cel puţin unul dintre termenii $x_{1,2k^2},\ x_{2,2k^2},\ldots,x_{k,2k^2}$ este mai mare ca $2k$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
- Timp efectiv de lucru: $2\frac{1}{2}$ ore.