Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a IX - a, Bistriţa
21 - 23 noiembrie 2014

Barem de corectură şi notare

Clasa a XI -a

Subiectul I.

Să se determine numerele reale $x,\ y,\ z,\ t$ pentru care

$$2t+t^2x=x,\ 2x+x^2y=y,\ 2y+y^2z=z,\ 2z+z^2t=t.$$

Soluţie:

Avem:

$x=\dfrac{2t}{1-t^2},\ y=\dfrac{2x}{1-x^2},\ z=\dfrac{2y}{1-y^2},\ t=\dfrac{2z}{1-z^2}$ 1p

Ne este sugerat să punem: $t=tg\alpha$.................... 1p

Atunci: $x=tg\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$

Atunci $x=tg2\alpha,\ y=tg4\alpha,\ z=tg8\alpha,\ t=tg16\alpha$.................... 2p

de unde $tg16\alpha=tg\alpha$ 1p

cu soluţiile $\alpha=\dfrac{k\pi}{15},\ k\in\mathbb{Z}$.................... 1p

Rezultă:

$x=tg\dfrac{2k\pi}{15},\ y=tg\dfrac{4k\pi}{15},\ z=tg\dfrac{8k\pi}{15},\ t=tg\dfrac{k\pi}{15}, k\in\mathbb{Z}$.................... 1p

Subiectul II.

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $A^n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se determine $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos(n\alpha) & \sin(n\beta)\\ -\sin(n\beta) & \cos(n\alpha)\end{pmatrix}$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie:

a) Dacă $\alpha=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ şi $\beta=p\pi,\ p\in\mathbb{Z}$, atunci $A^n=O_2,\ n\in\mathbb{N}^*$ 0,5p

În celelalte cazuri, există $x\in[0,2\pi)$ astfel încât

$\cos x=\dfrac{cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\beta}$ şi $\sin x=\dfrac{\sin\beta}{\cos^2\alpha+\sin^2\beta}$ 0,5p

Atunci

$A=(\cos^2\alpha+\sin^2\beta)\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}$ 0,5p

Prin inducţie matematică, se arată că

$A^n = (\cos^2\alpha + \sin^2\beta)^n \begin{pmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{pmatrix},\ n \in \mathbb{N}^*$ 0,5p

b) Avem $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\beta & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos^2\alpha - \sin^2\beta \end{pmatrix}$ 0.5p

şi $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\beta \\ -\sin 2\beta & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$ 0,5p

de unde obţinem sistemul:

$\begin{cases} \sin^2\beta = \sin^2\alpha \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin(2\beta) \end{cases}$ 0,5p

Din prima ecuaţie rezultă că $\sin\beta = \pm\sin\alpha = \sin(\pm\alpha)$ cu

$\beta = (\pm\alpha)(-1)^k + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ 0,5p

Cazul I: $k = 2p,\ p \in \mathbb{Z}$.

Atunci $\beta = \pm\alpha + 2p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$.

Înlocuim în a doua ecuaţie a sistemului şi se obţine

$\sin(\alpha \pm \alpha + 2p\pi) = \sin(\pm 2\alpha + 4p\pi)$

adică $\sin(\alpha \pm \alpha) = \sin(\pm 2\alpha)$ 0,5p

Dacă luăm relaţia cu " + ", avem egalitate şi deci

$\beta = \alpha + 2p\pi,\ p \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathbb{R}$

Rezultă $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, care verifică formulele de la b) 0,5p

Dacă luăm relaţia cu "-", avem: $\sin 2\alpha = \sin 0$, de unde $\alpha = \frac{q\pi}{2},\ q \in \mathbb{Z}$

şi $\beta = -\frac{q\pi}{2} + 2p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$ 0,5p

Şi în acest caz se verifică formulele de la b).

Cazul II. $k = 2p + 1\ (impar),\ p \in \mathbb{Z}$.

Atunci $\beta = \pm\alpha + (2p+1)\pi,\ p \in \mathbb{Z}$

Înlocuim în a doua ecuaţie a sistemului şi obţinem:

$\sin(\alpha \pm \alpha + (2p+1)\pi) = \sin(\pm 2\alpha + 2(2p+1)\pi)$

adică $\sin(\alpha \pm \alpha + \pi) = \sin(\pm 2\alpha)$ 0,5p

Dacă luăm varianta cu "+", avem: $-\sin 2\alpha = \sin 2\alpha$

de unde $\alpha = \frac{q\pi}{2},\ q \in \mathbb{Z}$ şi $\beta = \frac{q\pi}{2} + (2p+1)\pi,\ q,\ p \in \mathbb{Z}$

Pentru aceste valori se verifică formulele pentru A^n de la b) 0.5p

În varianta cu "-", avem $\sin 2\alpha = 0$, de unde $\alpha = \frac{q\pi}{2},\ q \in \mathbb{Z}$

cu $\beta = -\frac{q\pi}{2} + (2p+1)\pi,\ p, q \in \mathbb{Z}$, care verifică relaţia de la b) 0,5p

În concluzie, soluţiile sunt:

$\beta = \alpha + 2p\pi,\ \alpha \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z}$ şi $\begin{cases} \beta = \frac{q\pi}{2} + (2p+1)\pi \\ \alpha = \frac{q\pi}{2} \end{cases},\ p,\ q \in \mathbb{Z}$

Subiectul III.

Considerăm următoarele k, $k \geq 3$, şiruri $(x_{1,n})$, $(x_{2,n})$, ... , $(x_{k,n})$ care au termenii iniţiali pozitivi, iar pentru $n \geq 1$ avem:

$$x_{1,n+1} = x_{2,n} + \frac{1}{x_{3,n}},\ x_{2,n+1} = x_{3,n} + \frac{1}{x_{4,n}},$$
$$\vdots$$
$$x_{k-2,n+1} = x_{k-1,n} + \frac{1}{x_{k,n}},\ x_{k-1,n+1} = x_{k,n} + \frac{1}{x_{1,n}},\ x_{k,n+1} = x_{1,n} + \frac{1}{x_{2,n}}$$

Arătaţi că:

a) nici unul dintre şiruri nu este mărginit;

b) cel puţin unul dintre termenii $x_{1,2k^2},\ x_{2,2k^2}, ..., x_{k,2k^2}$ este mai mare ca $2k$.

Soluţie:

a) Este suficient să demonstrăm că unul dintre şiruri este nemărginit; de exemplu $(x_{1,n})$, atunci rezultă că celelalte sunt nemărginite. 1p

Considerăm acum

$$a_n^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} x_{i,n}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots 1\text{p}$$

Avem:

$$a_2^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} x_{i,n}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} x_{i,1} + \frac{1}{x_{i,1}}\right)^2 \geq 4k^2 = 2 \cdot 2k^2 \quad \ldots\ldots\ldots 1\text{p}$$

şi

$$a_{n+1}^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} x_{i,n} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_{i,n}}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} x_{i,n}\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{k} x_{i,n}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_{i,n}}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i,n}}\right)^2 \geq$$
$$\geq a_n^2 + 2\left[k + \sum_{1 \leq i < i < j \leq k} \left(\frac{x_{i,n}}{x_{j,n}} + \frac{x_{j,n}}{x_{i,n}}\right)\right] \geq$$
$$\geq a_n^2 + 2\left[k + 2C_k^2\right] = a_n^2 + 2k^2 \quad \ldots\ldots\ldots 1\text{p}$$

Acum prin inducţie matematică, găsim $a_n^2 \geq n \cdot 2k^2$, pentru $n \geq 2$.

Rezultă că şirul (a_n^2) este nemărginit. Deci, cel puţin unul din şirurile $(x_{1,n})$, $(x_{2,n}), ..., (x_{k,n})$ este nemărginit 1p

b) Avem

$$a_{2k^2}^2 \geq 2k^2 \cdot 2k^2 = 4k^4 \quad \ldots\ldots\ldots 0{,}5\text{p}$$

de unde $\left(\sum_{i=1}^{k} x_{i,2k^2}\right)^2 > 4k^4$ 0,5p

adică $\sum_{i=1}^{k} x_{i,2k^2} > 2k^2 = k \cdot (2k)$ 0,5p

ceea ce implică că cel puţin unul din termenii $x_{i,2k^2}$, $i = \overline{1,k}$ este mai mare ca $2k$ 0,5p