Concursul Interjudeţean
"Matematica, de drag"
Ediţia a IX - a, Bistriţa
21 - 23 noiembrie 2014

Barem de corectură şi notare

Clasa a X -a

Subiectul I.

Fie numerele reale strict pozitive x şi y astfel încât $x^5+y^5=x-y$. Să se arate că $x^4+11y^4<1$.

Soluţie:

Avem:

$x-y=x^5+y^5>0$ 1p

şi $x^4+11y^4<1 \Leftrightarrow x^4+11y^4<\frac{x^5+y^5}{x-y}$ 1p

$\Leftrightarrow x^5+11y^4x-x^4y-11y^5<x^5+y^5$ 1p

$\Leftrightarrow 12y^5+x^4y>11y^4x$ 0,5p

Folosim inegalitatea mediilor şi avem:

$12y^5+x^4y=4y^5+4y^5+4y^5+x^4y\geq 4\sqrt[4]{4^3y^{16}x^4}=4\sqrt[4]{4^3}y^4x$ 1,5p

Dar $4\sqrt[4]{4^3}=4\sqrt{8}=\sqrt{128}>11$ 1p

Aşadar, avem:

$12y^5+x^4y>11xy^4$ 1p

Subiectul II.

Pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$ se definesc mulţimile

$$A_p=\{\cos(pn\sqrt{2}\pi)\mid n\in\mathbb{N}\}$$

a) Demonstraţi că A_p este infinită, pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$.

b) Determinaţi mulţimea $A_{38}\bigcap A_{53}$.

Soluţie:

Demonstrăm că dacă

(1) $\cos(pn_1\sqrt{2}\pi)=\cos(pn_2\sqrt{2}\pi)$, $n_1,\ n_2\in\mathbb{N}$, atunci $n_1=n_2$.............. 1p

Din (1) rezultă că $pn_1\sqrt{2}\pi=\pm pn_2\sqrt{2}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

de unde

$pn_1\sqrt{2}=\pm pn_2\sqrt{2}+2k,\ k\in\mathbb{Z}$.............. 1p

egalitate posibilă numai dacă $k=0$.

Atunci avem $n_1=\pm n_2$

Dacă $n_1=-n_2,\ n_1,n_2\in\mathbb{N}$, deducem că $n_1=n_2=0$ 1p

Aşadar $n_1=n_2$ şi deci A_p este infinită.............. 1p

b) Fie $x\in A_{38}\bigcap A_{53}$. Rezultă că există n şi m astfel încât

$x=\cos(38n\sqrt{2}\pi)=\cos(53m\sqrt{2}\pi)$ 1p

de unde $38n\sqrt{2}\pi=\pm 53m\sqrt{2}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Această egalitate are loc numai dacă $k=0$.

Rezultă $38n=\pm 53m$ 1p

Varianta $38n=-53m$ este imposibilă în $\mathbb{N}$.............. 0,5p

Din $38n=53m$, ţinând cont de faptul că $(38,53)=1$, rezultă că $n=53t$ şi $m=38s,\ t\in\mathbb{N}$.

Atunci avem : $x = \cos(38 \cdot 53t\sqrt{2}\pi) = \cos(2014t\sqrt{2}\pi)$, ceea ce ne arată că $A_{38} \bigcap A_{53} = A_{2014} \ldots$ 05,p

Subiectul III.

Fie a şi b numere reale, iar

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x-a)(x-a-b)(x-a-b-1)(x-a-2b-1) + \tfrac{b^2(b+1)^2}{4} + 1.$$

i) Arătaţi că $f(x) > 0$, pentru orice x real;

ii) Aflaţi minimul lui f.

Soluţie:

i) Se observă că $a + a + 2b + 1 = a + b + a + b + 1$ 0,5p

atunci

$f(x) = [x^2 - (2a+2b+1)x + a(a+2b+1)] \cdot [x^2 - (2a+2b+1)x + (a+b)(a+b+1)] + \dfrac{b^2(b+1)^2}{4} + 1$

.... 1,5p

Observăm că

$(a+b)(a+b+1) - a(a+2b+1) = b(b+1)$ 0,5p

şi putem scrie:

$f(x) = [x^2 - (2a+2b+1)x + (a++2b+1) + \frac{b(b+1)}{2} - \frac{b(b+1)}{2}] \cdot [x^2 - (2a+2b+1)x + a(a+2b+1) + \frac{b(b+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2}] + \frac{b^2(b+1)^2}{4} + 1$ 1,5p

sau

$f(x) = \left[x^2 - (2a+2b+1)x + a(a+2b+1) + \dfrac{b(b+1)}{2}\right]^2 - \dfrac{b^2(b+1)^2}{4} + \dfrac{b^2(b+1)^2}{4} + 1$ adică

$f(x) = \left[x^2 - (2a+2b+1)x + a(a+2b+1) + \dfrac{b(b+1)}{2}\right]^2 + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ 1p

ii) Vom avea $\min f = 1$ dacă ecuaţia

$x^2 - (2a+2b+1)x + a(a+2b+1) + \frac{b(b+1)}{2} = 0$ are rădčini reale 1p

Avem:

$\Delta = (2a+2b+1)^2 - 4a(a+2b+1) - 2b(b+1) = 2b^2 + 2b + 1 > 0$ deoarece $\Delta_1 = -4 < 0$......... 1p